

深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 小测验第 4 章

小测验时间: 2022 年 4 月 28 日, 闭卷 (40 分钟)

解答

1. 已知图 G 有 6 条边, 有一个顶点度数是 3, 有一个顶点度数是 5, 其余顶点度数都是 2. 问: 图 G 有几个顶点?

解. 根据握手定理 $2|E| = \sum_v d(v)$, 设度数为 2 的顶点有 n 个, 则 $12 = 3 + 5 + 2n \Rightarrow n = 2$, 因此有 $1 + 1 + 2 = 4$ 个顶点, 如图1 □

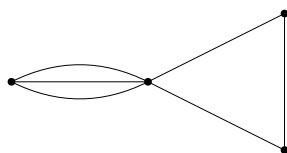


图 1: 第一题解答

2. 画出有 5 个顶点 3 条边的互不同构的图。其中有几个是连通图? 有几个是非连通图? 非连通的图各有几个连通分支?

解. 如图2, 没有连通图, 一共有 6 个非连通图, 连通分支依次为 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4 个。(也可以只考虑简单图) □

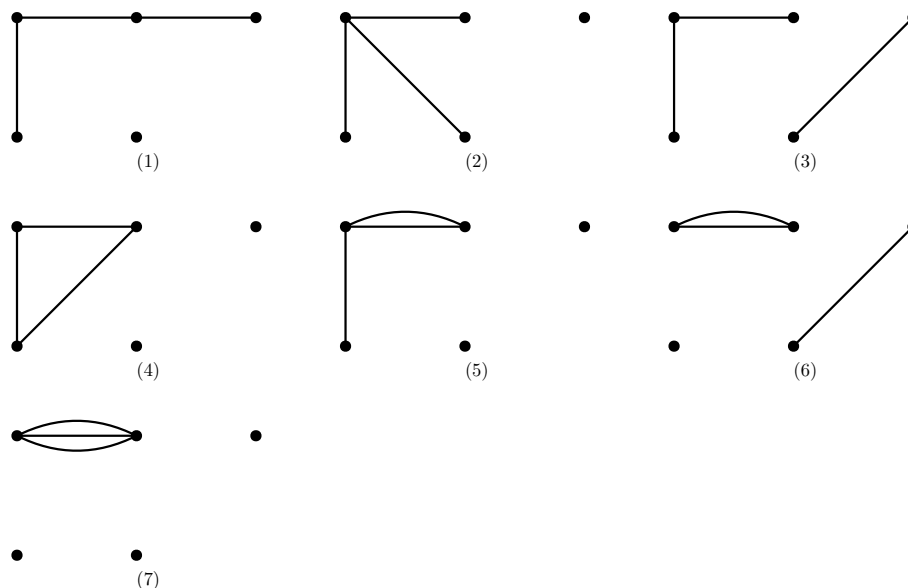


图 2: 第二题解答



图 3

3. 给定二部图 G 如图3

解. (1) G 的关联矩阵;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(2) G 的邻接矩阵 (顶点按 a, b, c, d, e 排序)。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

□

4. n 个顶点的完全图 K_n 是否包含欧拉回路? 是否包含 Hamilton 回路?

解. K_n 是连通图,

当 $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ 时, $\forall v \in V, d(v) = 2k - 1 \Rightarrow$ 根据定理不存在欧拉回路。

当 $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ 时, $\forall v \in V, d(v) = 2k \Rightarrow$ 根据定理存在欧拉回路。

当 $n = 1, 2$ 时, 不存在 Hamilton 回路。

当 $n \geq 3$ 时, $\forall v_1, v_2 \in V : d(v_1) + d(v_2) = 2n - 2 \geq n \Rightarrow$ 存在 Hamilton 回路。

□

5. 给定带权图如图3- (ii) .

解. (1) 最小生成树如图4

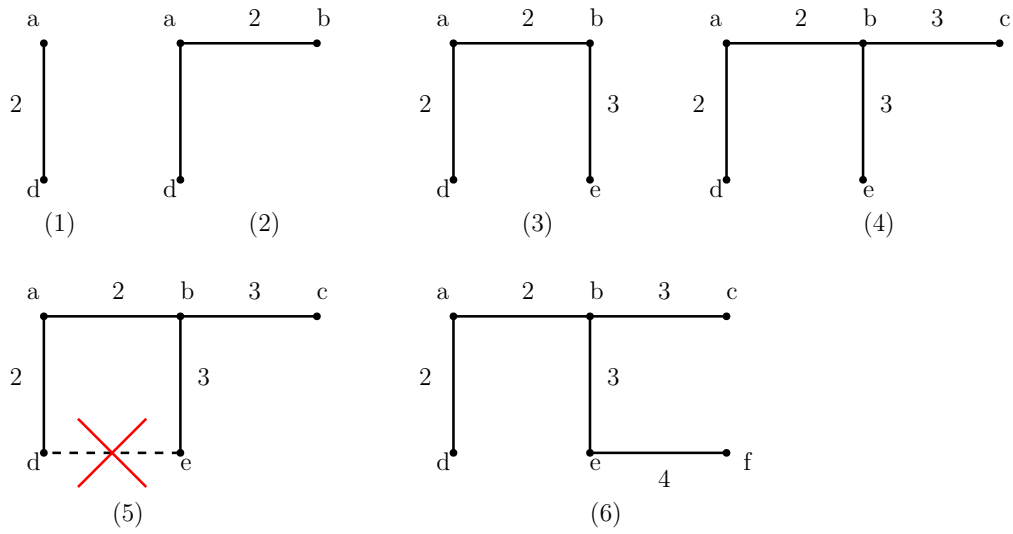


图 4: Kruskal 算法求最小生成树

(2) 用 Dijkstra 算法求点 a 到其余点的最短路。

如图5:

从 a 到 b : $a(a,b)b$ 。

从 a 到 c : $a(a,b)b(b,c)c$ 。

从 a 到 d : $a(a,d)d$ 。

从 a 到 e : $a(a,b)b(b,e)e$ 。

从 a 到 f : $a(a,b)b(b,e)e(e,f)f$ 。

(3) 忽略边的权，给出图的一个染色，如图6

(4) 忽略边的权，图的一个最大独立集 $S = \{b, d, f\}$

(5) 忽略边的权，图的一个最大团为 $H(V, E), V = \{c, d, e\}$

□

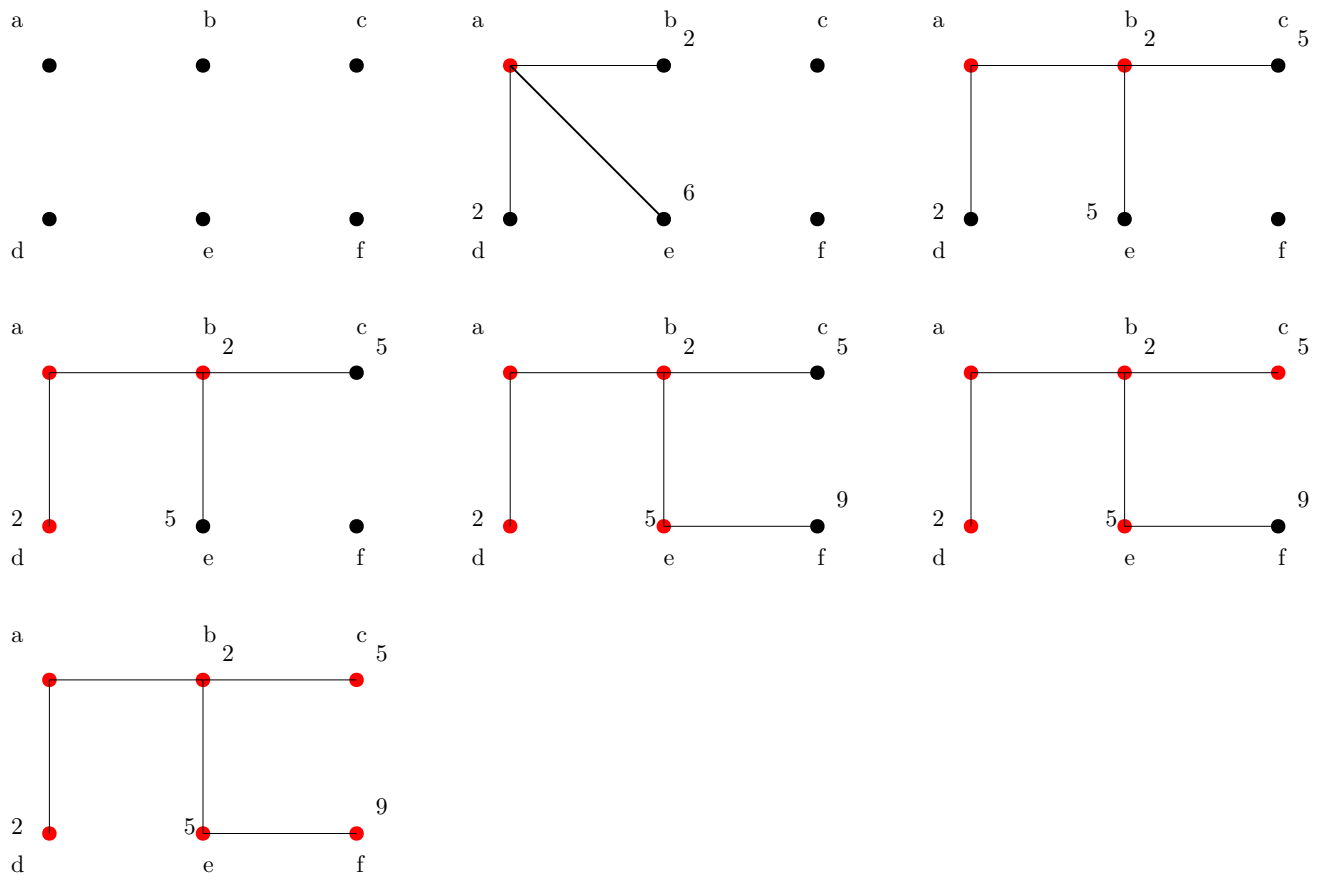


图 5: Dijkstra 算法求最短路径

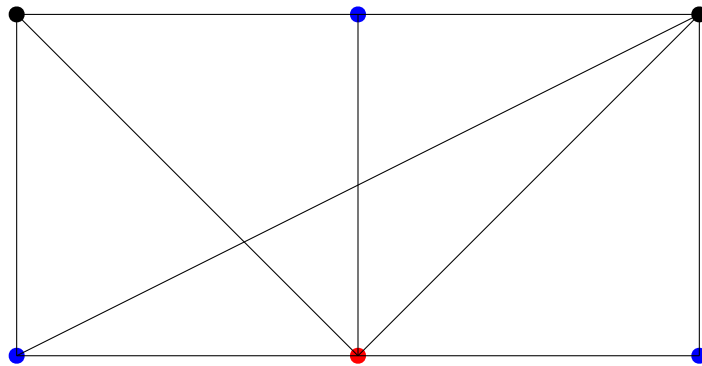


图 6: 一种图的染色