问题（总分 100 分，每个问题的分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）。

1. 用欧几里得算法计算最大公因子：(256, 134)。

$$(256,134) \to (134,122) \to (122,12) \to (12,2) \to (2,0)$$

最大公约数为 2。

2. 证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明. 反证法。假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，即

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, (p,q) = 1. \Rightarrow 3q^2 = p^2 \Rightarrow 3|p^2$$

证明 $3|p^2 \Rightarrow 3|p$：假设 3 不整除 p，则 $p \equiv 1$ 或 $2\ mod\ 3$，计算可得 $p^2 \equiv 1\ mod\ 3$，这与 $p^2 \equiv 0\ mod\ 3$ 即 $3|p^2$ 矛盾，因此 $3|p$。

设 $p^2 = 9t^2, t \in \mathbb{Z}$，有

$$3q^2 = 9t^2 \Rightarrow q^2 = 3t^2$$

同上可以推出 $3|q$，因此 $(p,q) \neq 1$。

这与假设 $(p,q) = 1$ 矛盾，所以 $\sqrt{3}$ 是无理数。 □

3. 抛一个 6 面的骰子，最少抛多少次骰子，能保证某一面出现了至少 3 次？

解. 由鸽笼原理，设扔 m 次，根据题意有

$$\left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil \geqslant 3 \Rightarrow m \geqslant 13.$$

至少要扔 13 次。 □

4. 一个班级有 150 名学生，其中 83 人有滑板车，97 人有自行车，28 人有摩托车，53 既有滑板车也有自行车，14 人既有滑板车也有摩托车，7 人既有自行车也有摩托车，2 人三种车都有。(1) 有多少学生什么车都没有？(2) 有多少学生只有自行车（而没有别的两种车)？

解. (1) 记全体为 X, 三个集合分别为 A,B,C。则什么车都没有的学生数量为 $|X| - |A \cup B \cup C|$, 由容斥原理得，

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 136$$
$$|X| - |A \cup B \cup C| = 14$$

因此有 14 名学生什么车都没有。

(2) 只有自行车的学生数量为 $|B| - |(B \cap A) \cup (B \cap C)|$，由容斥原理

$$|(B \cap A) \cup (B \cap C)| = |B \cap A| + |B \cap C| - |B \cap A \cap C| = 58$$
$$|B| - |(B \cap A) \cup (B \cap C)| = 39.$$

因此有 39 名学生只有自行车。 □

5. 设 n 是偶数。设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$ 满足：对任意的 $A, B \in \mathcal{A}$，都有 $A \nsubseteq B$ 且 $B \nsubseteq A$。(1) $|\mathcal{A}|$ 最大是多大？不必证明你的结论，但给出一个达到你给的上界的 $\mathcal{A}$ 的例子。(2) 假设你给出的 $|\mathcal{A}|$ 的上界是 $f(n)$。给出 $\frac{f(n)}{2^n}$ 的上界和下界。

解. (1) $\max |\mathcal{A}| = \binom{n}{\frac{n}{2}}$。

例：$\{1, 2, \cdots, n\}$ 所有大小为 $\frac{n}{2}$ 的子集。

考虑集合 $\mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, n\})$,

$$\mathcal{P} = \{\{\phi\}, \{1\} \cdots \{n\}, \{1, 2\} \cdots \{n-1, n\}, \cdots\}$$

定义 $\mathcal{B}_i, i = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为所有包含 i 个元素的子集。显然 $\mathcal{B}_i$ 满足题目条件，即

$$\forall A, B \in \mathcal{B}_i : A \nsubseteq B, B \nsubseteq A$$

根据 $\mathcal{B}_i$ 定义有 $|\mathcal{B}_i| = \binom{n}{i}$。根据组合数性质，对于偶数 n，当 $i = \frac{n}{2}$ 时，$\binom{n}{i}$ 最大。因此可以取 $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\frac{n}{2}}$，即 $\mathcal{A}$ 为所有包含 $\frac{n}{2}$ 个元素的子集，$\max |\mathcal{A}| = \binom{n}{\frac{n}{2}}$。

(2) 已证明有不等式

$$\frac{2^n}{\sqrt{2n}} \leqslant \binom{n}{\frac{n}{2}} \leqslant \frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

可得

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant \frac{f(n)}{2^n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

□