HW7 Solution

1. 证明：对图的顶点个数 $|G|=n$ 用归纳法。

基础情形：$n=1$，明显 $\chi(G)=1 \le 6$.

归纳假设：设 $n=m$ 时，结论成立

即，对任意有 m 个顶点的平面图，都有

$\chi(G) \le 6$.

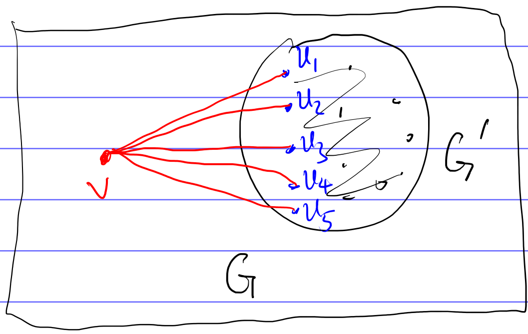
现在考虑 $n=m+1$ 的情况，设 $G=(V,E)$ 是一个有 $m+1$ 个顶点的平面图

根据讲义上推论 4.17，有：存在顶点 $v \in V$ 满足 $d(v) \le 5$.

从图 G 中去掉顶点 v 及与 v 连接的所有的边，得到一个 G 的子图 G'.

G' 是一个有 $m+1-1=m$ 个顶点的平面图，由归纳假设，有

$$\chi(G') \le 6.$$



现在考虑 G，由于 $d(v) \le 5$，因此 v 的邻居最多用 5 个不同的颜色，由于我们允许用 6 个颜色，因此在 G' 的染色方案的基础上，我们总可以选择 6 个颜色中的某一个颜色来染色顶点 v，使得 v 的颜色与 v 的邻居的颜色都不同。这样就说明 G 也可以用 6 个颜色染色，即：$\chi(G) \le 6$. □

2. 证明：课堂上已证明 r 是 A 的一个特征值，

只需要证明 r 是最大的特征值。

设 $s>r$，以下证明 s 不是 A 的特征值。

用反证法，假设 s 是 A 的特征值，且

$$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是 s 对应的一个特征向量，则

$$AX=s\cdot X \qquad (1)$$

设

$$|x_i|=\max_j |x_j|$$

即：x_i 是所有 x_j 中绝对值最大的。

因为 $X\neq 0$，故：$|x_i|>0$。

由 (1)，有：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = s\cdot x_i$$

两边取绝对值得：

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = s\cdot|x_i| \qquad (2)$$

因为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=r$，且每个 $a_{ij}\in\{0,1\}$。

故：

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \le r\cdot\max_j|x_j| = r\cdot|x_i| \qquad (3)$$

由 (2) 及 (3) 得：

$$s|x_i| \le r|x_i|$$

因为 $|x_i|>0$，故有 $s\le r$。

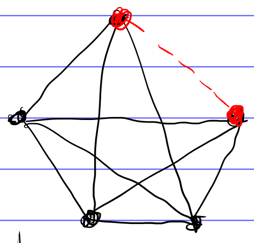
但这与 $s>r$ 矛盾。

$\square$

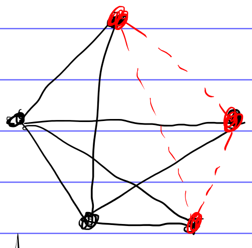
3.

$\alpha(G)$	最多边	最少边
1	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{2}$
2	$\binom{n}{2}-1$	$\frac{n(n-2)}{2}$
3	$\binom{n}{2}-3$	$\frac{n(n-3)}{2}$

• $\alpha(G)=2$ 时，最多边为从完全图 K_n 中去掉 1 条边，即，去掉 K_2。例如，$n=5$



例 $n=5$
$\alpha(G)=2$



例 $n=5$
$\alpha(G)=3$

上图示中红色虚线表示边不存在。

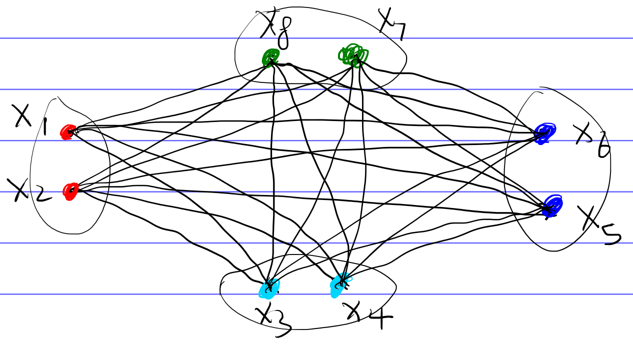
• $\alpha(G)=2$ 时，最少边可如下得到：把 G 的顶点分成 $\frac{n}{2}$ 等份，
记为：(设 n 是偶数)

$$V=\{x_1,x_2\}\cup\{x_3,x_4\}\cup\cdots\{x_{n-1},x_n\}$$

然后构造图 G 如下：

$$(x_1,x_j)\in E,\quad \forall\ j\neq 2$$
$$(x_2,x_j)\in E,\quad \forall\ j\neq 1$$
$$(x_3,x_j)\in E,\quad \forall\ j\neq 4$$
$$(x_4,x_j)\in E,\quad \forall\ j\neq 3$$
$$\cdots$$

等等。
如下图示 $(n=8)$



正

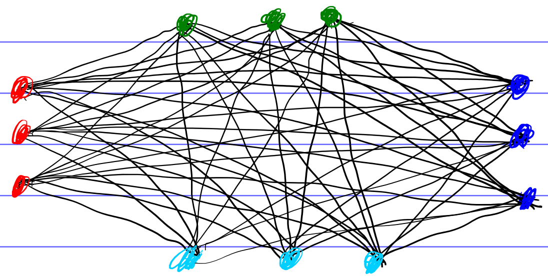
例：$n=8$，$\alpha(G)=2$

注意，这样构造的图是一个 $(n-1)$-
则图，即：每个点的度数都是 $n-2$
由握手定理

$$2|E|=\sum_v d(v)=n\cdot(n-2)$$
$$\Rightarrow\quad |E|=\frac{n(n-2)}{2}$$

• 类似的可讨论 $\alpha(G)=3$ 时最少边的情况，
即把 G 的顶点划分成等份

$$V=\{x_1,x_2,x_3\}\cup\{x_4,x_5,x_6\}\cup\cdots$$



例 $n=12$，$\alpha(G)=3$

4 由讲义定理4.31：一个图是二部图，即 $\chi(G)\leq 2$，当且仅当它不包含奇数个顶点的环。

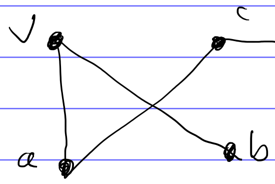
因此，要判断一个图是否包含奇数个顶点的环，只要判断图G是否满足 $\chi(G)\leq 2$

• 证明是：我们只须要判断G的每个连通分支是否包含奇数个顶点的环即可。因此，不失一般性，可假设G是连通的。

设 $v\in V$，

用 $L_i(v)$ 表示与 v 距离是 i 的点

例如：



$$L_1(v)=\{a,b\},$$
$$L_2(v)=\{c\}$$
$$L_3(v)=\{d\}$$

• 算法如下：

任选 $v\in V$，用如下方式染色

• 与 v 距离为偶数的点都染为红色

即：v, $L_2(v)$, $L_4(v)$, $L_6(v)$, …等

• 与 v 距离为奇数的点都染为蓝色

即：$L_1(v)$, $L_3(v)$, $L_5(v)$, …等

染色完成后，再检查此染色方案是否是正确的：即是否图中有某个边的两个顶点颜色相同

若染色正确，则说明 $\chi(G)\leq 2$

因此 G 不包含奇数顶点的环

若……不正确，…………$\chi(G)>3$

因此 G 包含奇数顶点的环

• 算法效率分析：

① 首先要计算其它顶点与 v 的距离，用 HW6-6 → Dijkstra 算法，需用 $O(|V|^2)$ 时间

② 染色，只须根据①的计算结果遍历每个顶点，因此用 $O(|V|)$ 时间

③ 检查染色是否正确，需要遍历所有的边，需用 $O(|E|)$ 时间

因此，总共时间是：

$$O(|V|^2)+O(|V|)+O(|E|)$$
$$=O(|V|^2+|E|)=O(|V|^2)$$

(注意上面用了 $|E|\leq\binom{|V|}{2}=O(|V|^2)$)

5. (1). 由矩阵定义可看出 G 是一个 3-正则图
由命题 4.29.

$$\chi(G) \le \Delta(G)+1 = 3+1 = 4.$$

用 $\alpha(G)$ 表示 G 的最大独立集大小. 因为图的染色实际是把图的顶点分成互不相交的独立集. 因此有

$$\alpha(G)\cdot\chi(G) \ge |V(G)|$$

即:

$$\chi(G) \ge |V(G)| / \alpha(G).$$

下面计算 $\alpha(G)$ 的上界.
由讲义定理 4.25 (Hoffman)

$$\alpha(G) \le \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{min}-\lambda_{max}} \cdot |V(G)|.$$

用 Mathematica 计算矩阵的特征值可得.

$$\lambda_{max}=3, \qquad \lambda_{min} = -2.$$

因此:

$$\alpha(G) \le \frac{-2}{-2-3} = \frac{2}{5}|V(G)|$$

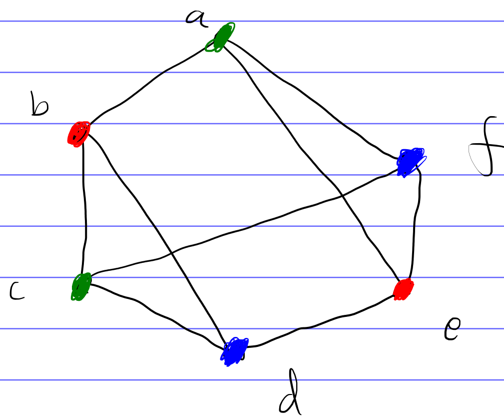
因此:

$$\chi(G) \ge \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \ge \frac{5}{2} = 2.5$$

因为 $\chi(G)$ 是整数, 故 $\chi(G) \ge 3$.
综合可得:

$$3 \le \chi(G) \le 4.$$

(2) 用 a, b, c, d, e, f 分别表示矩阵的第 1, 2, 3, 4, 5, 6 行/列.



故 $\chi(G)=3$.

$\square$

6. (1) $\phi(v_1)=1$, $\phi(v_2)=1$

$\phi(v_3)=2$, $\phi(v_4)=2$

$\phi(v_5)=3$, $\phi(v_6)=3$

$\vdots$

$\phi(v_{2n-1})=n$, $\phi(v_{2n})=n$

贪心算法用了 n 种颜色

(2) $\chi(G)=2$, $\left[\begin{array}{l} v_1, v_3, v_5, \cdots, v_{2n-1} \text{ 用红色} \\ v_2, v_4, v_6, \cdots, v_{2n} \text{ 用蓝色} \end{array}\right]$

贪心算法的染色数是 $\chi(G)$ 的 $\frac{n}{2}$ 倍.

$\square$

7. 证明：首先直接计算

$$f_S A f_T^T$$

$$= \sum_{i\in V} f_S(i) (A f_T^T)(i)$$

$$= \sum_{i\in V} f_S(i) \sum_{j\in V} A(i,j) f_T^T(j)$$

$$= \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} f_S(i) A(i,j) f_T(j) \quad (1)$$

注意：$f_S(i) A(i,j) f_T(j) = 1$

当且仅当：

$$f_S(i) = 1, \quad A(i,j)=1, \quad f_T(j)=1.$$

即：

$$i\in S, \quad (i,j)\in E, \quad j\in T.$$

因此，由(1)可得：

$$f_S A f_T^T = E(S,T) \quad (2)$$

下面再用另一种方式计算 $f_S A f_T^T$.

同讲义，设实对称矩阵 A 的特征值及特征向量分别为

$$\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n = \lambda_{min}$$

$$u_1, \quad u_2, \quad \cdots, \quad u_n$$

且，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是单位正交向量

因此，f_S, f_T 可在基 $u_1, u_2, \cdots u_n$ 下表示。

设：

$$f_S = \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

$$f_T = \sum_{j=1}^n b_j u_j \quad (3)$$

则：

$$f_S A f_T^T$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) A \left(\sum_{j=1}^n b_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j u_i A u_j$$

因 $A u_j = \lambda_j u_j$. 则得：

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j u_i \lambda_j u_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \lambda_j u_i u_j$$

因为 $u_1, u_2, \cdots u_n$ 是单位正交向量，故

$$u_i \cdot u_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

因此

$$f_S A f_T^T = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \lambda_i \tag{4}$$

$$= a_1 b_1 \lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i b_i \lambda_i$$

类似讲义 (4.4) 的计算可得：

$$|S| = \langle f_S, \vec{1} \rangle$$

$$= \langle f_S, \sqrt{n}\, u_1 \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sqrt{n}\, u_1 \rangle = \sqrt{n} \cdot a_1$$

类似地，

$$|T| = \langle f_T, \vec{1} \rangle$$

$$= \langle f_T, \sqrt{n}\, u_1 \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} b_i u_i, \sqrt{n}\, u_1 \rangle = \sqrt{n} \cdot b_1$$

又注意到 $\lambda_1 = \lambda_{max} = r$

故：

$$a_1 b_1 \cdot \lambda_1 = \frac{|S|}{\sqrt{n}} \cdot \frac{|T|}{\sqrt{n}} \cdot r = \frac{r \cdot |S| \cdot |T|}{n} \tag{5}$$

因此，由 (2) 及 (4) (5) 得：

$$E(S,T) = f_S A f_T^T$$
$$= \frac{r\cdot|S|\cdot|T|}{n} + \sum_{i=2}^{n} a_i b_i \lambda_i$$

即：
$$\left|E(S,T) - \frac{r\cdot|S|\cdot|T|}{n}\right|$$
$$= \left|\sum_{i=2}^{n} a_i b_i \lambda_i\right| \le \sum_{i=2}^{n} |a_i b_i \lambda_i|$$

$$\le \lambda \sum_{i=2}^{n} |a_i b_i| \quad \text{(因为根据题意：} |\lambda_i| \le \lambda \text{)}$$

$$\le \lambda \sqrt{\left(\sum_{i=2}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=2}^{n} b_i^2\right)} \quad \text{(柯西不等式)}$$

$$\le \lambda \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$$

又由讲义(4.5)计算知：

$$|S| = \langle f_S, f_S \rangle$$
$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

类似地，
$$|T| = \langle f_T, f_T \rangle$$
$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i u_i, \sum_{i=1}^{n} b_i u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

故得，
$$\left|E(S,T) - \frac{r\cdot|S|\cdot|T|}{n}\right| \le \lambda \cdot \sqrt{|S|\cdot|T|}$$

□

8. (1) $G(n,p)$的期望边数 $= \binom{n}{2}\cdot p$.

(2) A与B之间总共的边数是 $r\cdot s$

因此，A与B之间期望边数 $= r\cdot s\cdot p$.

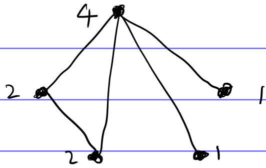
(3) 由(1)，$k = \binom{5}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2} = 5$.

有5条边的图顶点度数和 $= 2\cdot 5 = 10$.

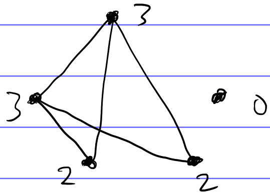
由于图有5个顶点，故每个顶点的度数 ≤ 4

按图的最大顶点度数分类，逐一考察顶点度数及5条边，可得顶点度数序列及不同构的图如下：

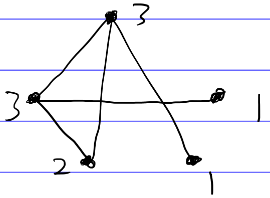
① 4, 2, 2, 1, 1.



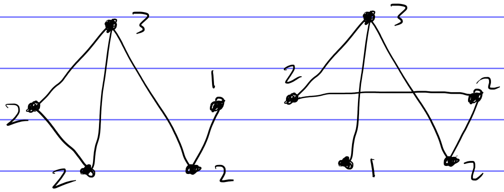
② 3, 3, 2, 2, 0



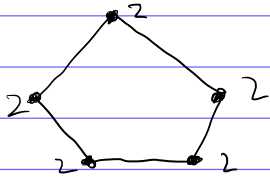
③ 3, 3, 2, 1, 1.



④ 3, 2, 2, 2, 1,



⑤ 2, 2, 2, 2, 2.



(4) 不是，图⑤看起不像随机图.

9. (1) 先计算 mod 13 的平方数.

$0^2\equiv 0$, $1^2\equiv 1$, $2^2\equiv 4$, $3^2\equiv 9$.

$4^2\equiv 3$ $5^2\equiv 12$ $6^2\equiv 10$ $7^2\equiv 10$

$8^2\equiv 12$ $9^2\equiv 3$ $10^2\equiv 9$ $11^2\equiv 4$

$12^2\equiv 1$.

因此, mod 13 的平方数集合是:

$$\{0, 1, 3, 4, 9, 10, 12\}$$
$$\equiv \{0, 1, 3, 4, -4, -3, -1\}$$

因此, 记图 G_{13} 的顶点集

$$V=\{0,1,2,3,\cdots,12\}$$

则 对 $a,b\in V$, $a\neq b$, 有

$$(a,b)\in E \iff |a-b|=1,3,4.$$

据此可画出图 $G_{13}=(V,E)$

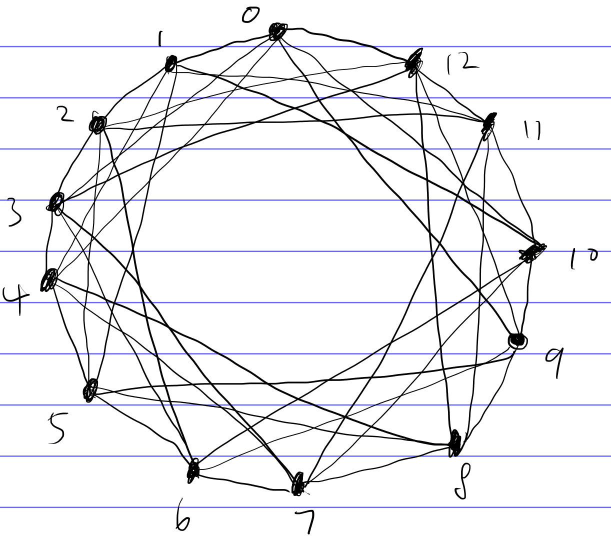


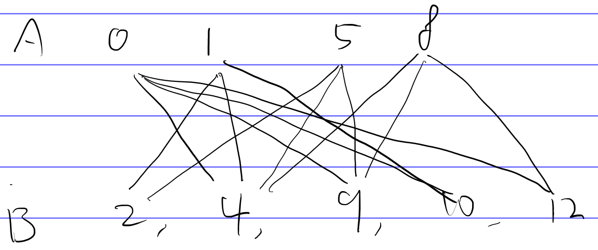
图 G_{13}

(2) 注意到每个顶点度数 $=6$, 由握手定理

$$2|E| = \sum_v d(v) = 13\times 6$$
$$\Rightarrow \quad |E| = 39$$

用 $E(A,B)$ 表示 A 与 B 之间的边数.

从图 G_{13} 中可以画出 A 与 B 之间的边



故 $E(A,B)=13$.

(3) $G(13, 1/2)$ 期望的边数是：

$$\binom{13}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13\cdot 12}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2}=39$$

$G(13,\frac{1}{2})$ 中 A 与 B 之间期望的边数是

$$4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=10.$$

(4) 有随机性

$\square$