深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 7

交作业时间：5 月 5 日

作业规定（重要!）：

- 如果某个问题你不会做，你可以不做，你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答，写下你的部分解答。如果你不会做某个问题，不要写无关、混乱的解答，否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论，但每位同学必须独立写出自己的解答！如果发现**抄袭**，双方本次作业作废，都得 0 分。
- 如果你在别处（别的书或网络等）读到了某个作业问题的答案，你可以阅读解答，在理解了后，可以抄写解答，但必须清楚地写出答案的来源，比如“该解答来自于某处”。如果抄写解答而不写出来源，算作**剽窃**，本次作业作废，得 0 分。
- 这是一门数学课，所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确，但解答过程没有或不清楚，会被扣分至少 30%。

注：与图有关的所有问题，在没有明确说明的情况下，图均指无向简单图（即：两点之间最多一条边）。
问题（总分 100 分，每个问题分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）：

1. 设 G 是任意的一个平面图。证明：$\chi(G) \le 6$。（不能使用四色定理）

   提示：阅读讲义上平面图的知识。

2. 设 G 是一个 r-正则图，A 是 G 的邻接矩阵。证明：A 的最大特征值等于 r.

   提示：对任意 $s > r$，证明 s 不是 A 的特征值。利用行列式不等于 0 和矩阵的秩的关系。

3. 用 $\alpha(G)$ 表示图 $G = (V, E)$ 的最大的独立集的大小。设 $|V| = n$. 如果 $\alpha(G) = 1, 2, 3$ 时，问 G 分别最多有多少条边，最少有多少条边?

4. 设计一个算法用来判断图 $G = (V, E)$ 是否包含有奇数个顶点的环。分析你的算法的时间效率（即：最多运行多少步后可给出结果，步数可能依赖于图的顶点数 $|V| = n$ 和边数 $|E| = m$）。

5. 假设某个图的邻接矩阵如下

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 在不画出图的前提下，仅通过计算，估计图的 $\chi(G)$ 的大小或其范围；

提示：运用课堂上讲的 $\chi(G)$ 的上界和下界。矩阵的特征值可通过课程网页上给出的 WolframAlpha 来计算。

(2) 画出图，给出一个最小的染色方案。

6. 考虑对图1的贪心算法染色：对顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_8$，依次按顺序染色如下，对顶点 v_i，定义 $\phi(v_i)$ 为当前可用的最小的自然数。比如 $\phi(v_1) = 1, \phi(v_2) = 1, \phi(v_3) = 2$，等等。

(1) 给出贪心算法染色的结果，即，给出 ϕ 在每个顶点的值。贪心算法用了多少种颜色？

(2) $\chi(G)$ 是多少？贪心算法给出的染色数与 $\chi(G)$ 差多少倍？

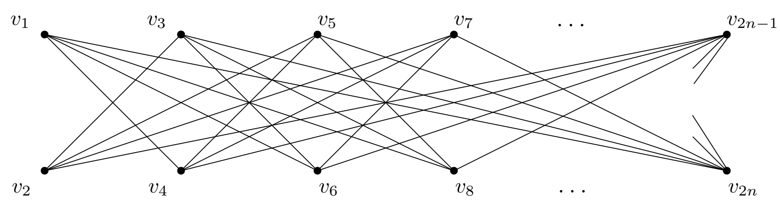

图 1: 用贪心算法按顺序染色。

7. 设 G 是一个有 n 个顶点的 r-正则图，设 λ 是其邻接矩阵除了最大特征值 r 外绝对值最大的特征值。设 $S, T \subseteq V$，用 $E(S,T)$ 表示 S 与 T 之间边数。证明：

$$\left| E(S,T) - \frac{r|S||T|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|S||T|}.$$

提示：类似讲义上研究独立集的情况，用两种方式计算 $f_S A f_T^T$。证明中需要用到柯西不等式 $\sum_{i=1}^k a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k b_i^2\right)}$.

8. 用如下方式生成一个有 n 个顶点的随机图：对任意两点，以 p 的概率连一条边，以 $1-p$ 的概率不连边。用 $G(n,p)$ 表示这个随机图。

(1) $G(n,p)$ 的期望[1]的边数是多少？

(2) 任选两个不相交的顶点集 A，B。假设 $|A| = r, |B| = s$。那么 A 与 B 之间期望的边数是多少？

(3) 设 $G(5, 1/2)$ 的期望的边数是 k。画出有 5 个顶点 k 条边的互不同构的图。

提示：同构的图都有相同的度数序列，可以先写出所有可能的顶点度数序列（顶点度数之和必须是 $2k$），再逐个检查哪些能构成所求的图。

(4) 在（3）的那些图中，所有的图看起来都像是随机生成的吗？如果不是的话，有多少你认为像是随机生成的？（本题是开放式问题，没有固定答案）

[1] 给定一个有限的实数集 $\{r_1, \ldots, r_k\}$，给定其上的一个概率分布：$p(r_i) = p_i$。该概率分布的期望定义为 $\sum_{i=1}^k p_i r_i$。换句话说，期望就是在给定概率分布下的平均值。

9. 下面是用数论的知识构造图的例子。设 q 是一个素数，且 $q \equiv 1 \mod 4$，即：q 被 4 除余 1。构造图 $G_q = (V, E)$ 如下：

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\},$$
$$E = \{(a,b) \in V \times V : a < b,\ \text{且存在} x \in V, \text{满足}\ b - a \equiv x^2 \mod q\}.$$

例如：当 $q = 5$ 时，G_5 画出来如图2. 为了画出 G_5，可以分如下两步进行。第一，先计算出 $\mod 5$ 的平方数

$$0^2 = 0 \equiv 0 \mod 5, \quad 1^2 = 1 \equiv 1 \mod 5, \quad 2^2 = 4 \equiv 4 \mod 5,$$
$$3^2 = 9 \equiv 4 \mod 5, \quad 4^2 = 16 \equiv 1 \mod 5.$$

所以，$\mod 5$ 的平方数的集合是 $S = \{0, 1, 4\}$. 第二步，就可以根据集合 S 来确定边。比如，$(2,3)$ 是一条边，因为 $3-2 = 1 \in S$，即 $3-2 = 1 \equiv 1^2 \mod 5$. 再比如，$(0,4)$ 是一条边，因为 $4-0 = 4 \in S$，即 $4-0 = 4 \equiv 2^2 \mod 5$. 而 2 和 4 之间没有边，因为 $4-2 = 2 \notin S$，即，不存在 $x \in \{0,1,2,3,4\}$ 使得 $4-2 \equiv x^2 \mod 5$.

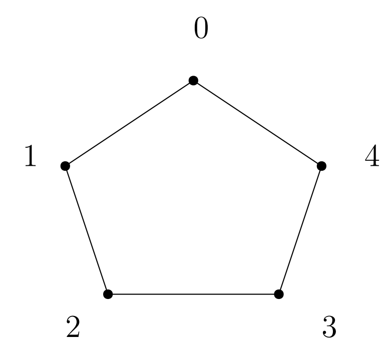

图 2: G_5

(1) 画出 G_{13}.

(2) G_{13} 的边数是多少？设 $A = \{0, 1, 5, 8\}$，$B = \{2, 4, 9, 10, 12\}$. 在图 G_{13} 中，A 与 B 之间的边数是多少?

(3) 根据第 5 题，符号 $G(13, 1/2)$ 表示有 13 个顶点，以 1/2 的概率连接每条边的随机图。根据第 5 题的第（1）问的解答，$G(13, 1/2)$ 期望边数是多少?

根据第 5 题的第 (2) 问的解答，如果 $r = 4, s = 5$，且 A 与 B 是不相交的顶点集，$|A| = 4, |B| = 5$。那么 $G(13, 1/2)$ 中 A 与 B 之间的期望的边数是多少?

(4) 比较本题（2）和（3）的答案，用数论方法构造的图 G_{13} 有没有随机性?（本题是开放式问题，没有固定答案）

注：$G(13, 1/2)$ 是随机构造的（每一条边选择连接或不连接的概率都是 1/2），而 G_{13} 的构造过程是确定的。