

## 深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 6

交作业时间: 4 月 28 日

### 作业规定 (重要!):

- 如果某个问题你不会做, 你可以不做, 你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答, 写下你的部分解答。如果你不会做某个问题, 不要写无关、混乱的解答, 否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论, 但每位同学必须独立写出自己的解答! 如果发现**抄袭**, 双方本次作业作废, 都得 0 分。
- 如果你在别处 (别的书或网络等) 读到了某个作业问题的答案, 你可以阅读解答, 在理解了后, 可以抄写解答, 但必须清楚地写出答案的来源, 比如“该解答来自于某处”。如果抄写解答而不写出来源, 算作**剽窃**, 本次作业作废, 得 0 分。
- 这是一门数学课, 所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确, 但解答过程没有或不清楚, 会被扣分至少 30%。

**注: 与图有关的所有问题, 在没有明确说明的情况下, 图均指无向简单图 (即: 两点之间最多一条边)。**

**问题 (总分 100 分, 每个问题分数平均分配, 每个问题的小问, 分数平均分配):**

1. 用 Kruskal 算法计算图 4.15 的最小生成树。要求画出算法执行的每个步骤 (如果只画出最终的最小生成树, 而没有算法的执行步骤, 得 0 分)。
2. 利用 “The frequency of the letters of the alphabet in English” 中用 Concise Oxford Dictionary 的数据给出的字母频率表回答以下问题。
  - (1) 用 Huffman 编码算法给每个英语字母编码, 并计算平均码长。
  - (2) 计算字母表的香农熵。香农熵与平均码长的差是多少?
3. 用 Dijkstra 算法计算图 4.12 中, 从左下角的点到任意其他点的最短距离。要求画出算法执行的每个步骤 (如果只给出最短距离, 而没有算法的执行步骤, 得 0 分)。
4. 任意给定两个正数  $m > n > 0$ . 构造一个图包含顶点  $x, y$ , 使得图满足如下条件: (i)  $x$  到  $y$  的最短距离  $\leq n$ ; (ii) 如果执行讲义上描述的贪心算法, 从  $x$  到  $y$  的距离  $\geq m$ . 因此, 贪心算法给出的路线比实际路线至少长  $m - n$ .

注: 因为  $m$  和  $n$  是任意给定的, 因此, 这样就证明了对最短路问题, 贪心算法给出的距离可以比最短距离任意大。

5. 证明 Dijkstra 算法的正确性。即证明: 在算法 6 中, 当某个点  $v$  被选择为 curvtx 时, 其对应的  $d(v)$  一定是从  $x$  到  $v$  的最短距离。

6. 分析算法效率如何依赖于图  $G = (V, E)$  的顶点数  $|V|$  和边数  $|E|$ .

(1) 分析 Kruskal 算法, 需要执行最多多少步才能给出结果?

(2) 分析 Dijkstra 算法, 需要执行最多多少步才能给出结果?

注: 上面题目中没有明确定义什么叫做“一步”, 你可自行选择你自己认为恰当的定义。

7. 自行查找阅读贪心算法的资料。回答下列问题:

(1) 还有什么问题贪心算法能给出最优结果? 举一例。

(2) 还有什么问题贪心算法不能给出最优结果? 举一例。