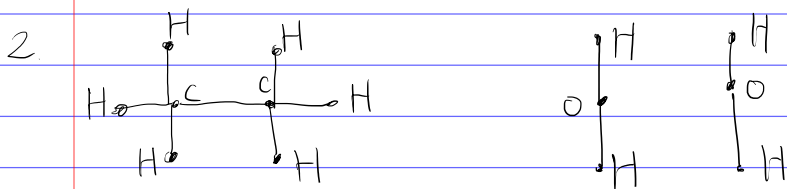


# HW4

1. 最大的边数 =  $\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$ .

由  $\dots = 0$ .



乙炔, 1个连通分支

两个水分子  
2个连通分支

3. (1)  $d(B)=1, d(D)=3, d(F)=5$ .

根据握手定理, 奇数度的顶点应该是偶数个. 因此,  $\{B, D, F\}$  中一定有人撒谎.

或者:  $\{A, F\}$  两人中一定有人撒谎.

因为  $d(A)=0, d(F)=5$

在6个顶点的图中, 这两种度数不能同时存在.

(2) 类似(1),  $\{A, B, D, E, F\}$  中一定有人撒谎.

4. 用图论语言描述为如下问题:

$G=(V, E), |V| \geq 2$ , 是否存在  $a, b \in V$ ,  
 $a \neq b$ , 满足  $d(a)=d(b)$ .

证明: 设  $V=n$ . 则顶点度数可取下列值

$0, 1, 2, \dots, n-1$ .

下面分情况讨论

(1) 设有顶点度数为 0, 即所有顶点的度数都  $\geq 1$ .

则因为共有  $n$  个顶点, 但度数只有

$1, 2, \dots, n-1$

共  $n-1$  种选择. 由鸽巢原理, 必存在至少 2 个顶点有相同的度数.

(2) 存在某个顶点  $x \in V$ ,  $d(x)=0$

此时, 必有任意顶点的度数都  $\leq n-2$

这是因为若有  $y \in V$ , 满足  $d(y)=n-1$

则  $d(y)=n-1 \Rightarrow (y, x) \in E$

$\Rightarrow d(x) \geq 1$

与  $d(x)=0$  矛盾.

因此所有顶点度数都  $\leq n-2$ , 即, 顶点度数只可取如下

$0, 1, 2, \dots, n-2$

共  $n-1$  个值. 但顶点个数是  $n$  个. 因此由鸽巢原理得必存在至少 2 个顶点有相同度数. □

5 略

6. (1). 2 个顶点:

a, b

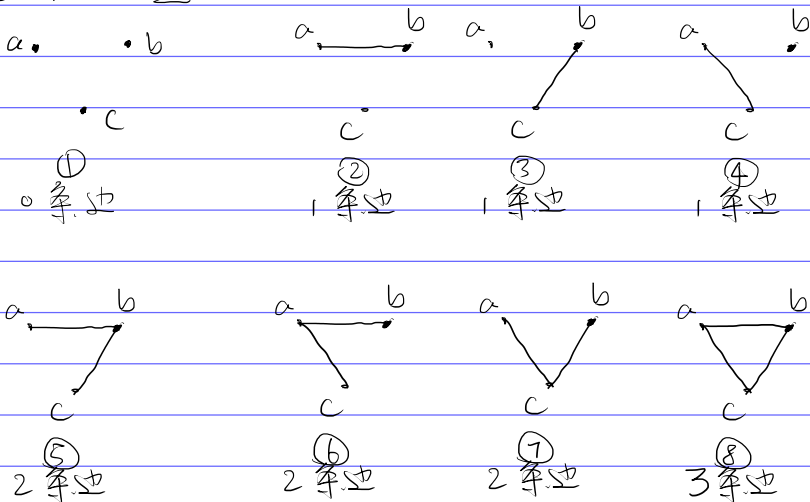
①

a — b

②

共 2 个

3个顶点



共8个.

(2)  $2^{\binom{n}{2}}$  个.

因为由  $n$  个顶点的图最多有  $\binom{n}{2}$  条边，若要构造一个图时，每一条边有 2 种选择：选择这条边在图中，或不在图中。在不考虑同构时，根据边的不同选取得到不同的图。因此图的个数就是不同的选法数，即

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\binom{n}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$$

最多的边数 =  $\binom{n}{2}$

若  $n=20$ ，则

$$2^{\binom{20}{2}} = 2^{190} \approx 1.6 \times 10^{57}$$

7. (1) 由第6题, 有

$$N = 2^{\binom{10^9}{2}}$$

把  $N$  用 2 进制表示需要的位数是

$$\lceil \log_2 N \rceil = \binom{10^9}{2}$$

$$= 4.999999995 \times 10^{17}$$

(2) 因为图有  $10^9$  个顶点, 故对顶点用 2 进制  
编码需要  $\frac{10^9}{2}$

$$\lceil \log_2 10^9 \rceil = 30 \text{ (位)}$$

因此所有顶点共须

$$30 \times 10^9 = 300 \text{ 亿} = 3 \times 10^{10} \text{ (位)}$$

每一边的表示须要用

$$30 \times 2 + 1 = 61 \text{ (位)}$$

因此表示所有的边须要用

$$\binom{10^9}{2} \times 61 \approx 3.05 \times 10^{19} \text{ (位)}$$

因此, 表示该图的图共需

$$3 \times 10^{10} + 3.05 \times 10^{19} \approx 3.05 \times 10^{19} \text{ (位)}$$

因为

$$1 \text{ G} = 10^9 \times 8 \text{ (位)}$$

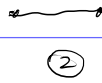
故, 共需

$$\frac{3.05 \times 10^{19}}{8 \times 10^9} \approx 3.8 \times 10^9 = 38 \text{ 亿 G.}$$

□

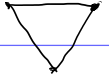
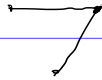
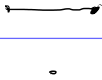
8.

(1) 2个顶点.



共2个

3个顶点



0条边

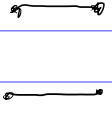
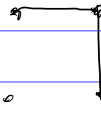
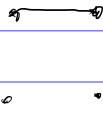
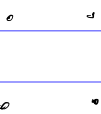
1条边

2条边

3条边

共4个

4个顶点

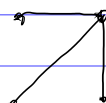
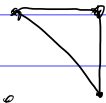
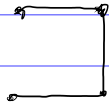


0条边

1条边

2条边

2条边



3条边

3条边

3条边

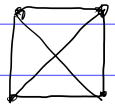
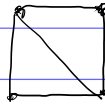
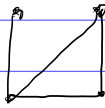
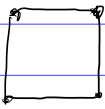
最大度数=2

最大度数=2

最大度数=3

无环

有环



⑧  
4 条边

⑨  
4 条边

⑩  
5 条边

⑪  
6 条边

最大度数=2    最大度数=3

4 条边的环    3 条边的环

共 11 个

(2) 田 ~~字~~

□