深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 4

交作业时间：4 月 14 日

作业规定（重要!）：

- 如果某个问题你不会做，你可以不做，你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答，写下你的部分解答。如果你不会做某个问题，不要写无关、混乱的解答，否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论，但每位同学必须独立写出自己的解答！如果发现**抄袭**，双方本次作业作废，都得 0 分。
- 如果你在别处（别的书或网络等）读到了某个作业问题的答案，你可以阅读解答，在理解了后，可以抄写解答，但必须清楚地写出答案的来源，比如 "该解答来自于某处"。如果抄写解答而不写出来源，算作**剽窃**，本次作业作废，得 0 分。
- 这是一门数学课，所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确，但解答过程没有或不清楚，会被扣分至少 30%。

注：与图有关的所有问题，在没有明确说明的情况下，图均指无向简单图（即：两点之间最多一条边）。
问题（总分 100 分，每个问题分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）：

1. 有 20 个顶点的图的最大的边数是多少？最少的边数是多少？

2. 画出乙烷的图，画出两个水分子的图。图中应标明每个点对应的原子是什么。写出每个图的连通分支个数。

3. 假设人与人之间的认识关系是相互的。在一个案件侦破中，警察抓获了一个六人犯罪团伙，并审讯他们各自相互认识的关系。

   (1) 在第一次审讯后，六个人 A, B, C, D, E, F 回答的认识的人数分别是：$0, 1, 2, 3, 4, 5$。有人撒谎吗？如果有，指出一个子集，使得这个子集一定包含至少一个撒谎的人。

   (2) 在第二次审讯后，六个人回答的认识的人数分别是：$1, 1, 2, 3, 3, 3$。有人撒谎吗？如果有，指出一个子集，使得这个子集一定包含至少一个撒谎的人。

4. (1) 假设人与人之间的认识关系是相互的。因为你经常参加聚会，而且喜欢观察，你发现了如下现象：任意一个至少有两人的聚会中，总存在两个人，在聚会中他们认识的人的个数相同。你感觉这个现象很奇妙。

   把上面奇妙的现象用图论的语言描述，并证明之。

   提示：鸽笼原理。

(2) 在真实生活的聚会中，（1）的结论不一定成立。为什么?

5. (1) 下面是金庸作品中的一些人物：郭靖，黄蓉，杨过，小龙女，郭襄，张君宝，觉远，张无忌，小昭，阿朱，阿紫，木婉清，仪琳。假设这些人超越时空一起聚会，查阅金庸作品或网络资料，画出他们认识关系的图。(注：如果你查阅了资料，给出参考了什么资料）

   (2) 在（1）的聚会中，找出两个人，使得他们认识聚会的人数相同，并且是所有满足这种条件的两个人中，认识的人数最多的。

6. 本题不考虑同构。

   (1) 不考虑同构，画出所有 2 个顶点，3 个顶点的图。他们各有多少个?

   (2) 不考虑同构，有 n 个顶点的图有多少个? 给出解释。计算或估计有 20 个顶点的图有多少个?

7. (1) 微信用户有 10 几亿。假设微信用户是 10 亿人。设有 10 亿个顶点的图有 N 个（不考虑同构），把 N 用二进制表示，需要多少位?

   (2) 给定一个三个顶点的图 $G=(V,E)$。假设 $V=\{a,b,c\}$，$E=\{(a,b),(b,c)\}$. 我们可以按如下方式存储这个图，对每个顶点用二进制编码：$a=00, b=01, c=10$，然后按如下方式表示图的边：$(00,01,1),(01\ 10\ 1),(00,10,0)$，其中 $(00,10,0)$ 表示 a 与 c 之间没有边。如上对图 G 的表示用了 $2\times 3+5\times 3=21$ 位。设微信用户是 10 亿人。如果按如上方式要把微信用户的朋友关系图表示出来存储在某个文件中，这个文件大小大概有多大（即：多少字节，或多少兆，多少 G，等等)?

8. 本题考虑同构。

   (1) 考虑同构，画出所有 2 个顶点，3 个顶点，4 个顶点的互不同构的图。他们各有多少个?

   (2) 有 n 个顶点的互不同构的图大概有多少个? 给出解释。计算或估计有 20 个顶点的互不同构的图大概有多少个?

9. 用如下方式生成一个有 n 个顶点的随机图：对任意两点，以 p 的概率连一条边，以 $1-p$ 的概率不连边。用 $G(n,p)$ 表示这个随机图。

   (1) $G(n,p)$ 的期望的边数是多少?

   (2) 任选两个不相交的顶点集 A，B。假设 $|A|=r, |B|=s$。那么 A 与 B 之间期望的边数是多少?

   (3) 设 $G(5,1/2)$ 的期望的边数是 k。画出有 5 个顶点 k 条边的互不同构的图。

   提示：同构的图都有相同的度数序列，可以先写出所有可能的顶点度数序列（顶点度数之和必须是 $2k$)，再逐个检查哪些能构成所求的图。

   (4) 在（3）的那些图中，所有的图看起来都像是随机生成的吗? 如果不是的话，有多少你认为像是随机生成的?（本题是开放式问题，没有固定答案）

10. 下面是用数论的知识构造图的例子。设 q 是一个素数，且 $q \equiv 1 \mod 4$，即：q 被 4 除余 1。构造图 $G_q = (V, E)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
&V = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}, \\
&E = \{(a, b) \in V \times V : a < b, \text{ 且存在} x \in V, \text{满足 } b - a \equiv x^2 \mod q\}.
\end{aligned}
$$

例如：当 $q = 5$ 时，G_5 画出来如图1. 为了画出 G_5，可以分如下两步进行。第一，先计算出 $\mod 5$ 的平方数

$$
\begin{aligned}
&0^2 = 0 \equiv 0 \mod 5, \quad 1^2 = 1 \equiv 1 \mod 5, \quad 2^2 = 4 \equiv 4 \mod 5, \\
&3^2 = 9 \equiv 4 \mod 5, \quad 4^2 = 16 \equiv 1 \mod 5.
\end{aligned}
$$

所以，$\mod 5$ 的平方数的集合是 $S = \{0, 1, 4\}$. 第二步, 就可以根据集合 S 来确定边。比如, $(2, 3)$ 是一条边, 因为 $3 - 2 = 1 \in S$, 即 $3 - 2 = 1 \equiv 1^2 \mod 5$. 再比如, $(0, 4)$ 是一条边, 因为 $4 - 0 = 4 \in S$, 即 $4 - 0 = 4 \equiv 2^2 \mod 5$. 而 2 和 4 之间没有边，因为 $4 - 2 = 2 \notin S$，即，不存在 $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 使得 $4 - 2 \equiv x^2 \mod 5$.

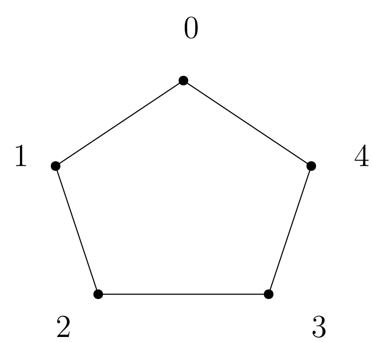

图 1: G_5

(1) 画出 G_{13}.

(2) G_{13} 的边数是多少？设 $A = \{0, 1, 5, 8\}$，$B = \{2, 4, 9, 10, 12\}$. 在图 G_{13} 中，A 与 B 之间的边数是多少?

(3) 根据第 5 题，符号 $G(13, 1/2)$ 表示有 13 个顶点，以 1/2 的概率连接每条边的随机图。根据第 5 题的第（1）问的解答，$G(13, 1/2)$ 期望边数是多少?

根据第 5 题的第 (2) 问的解答, 如果 $r = 4, s = 5$, 且 A 与 B 是不相交的顶点集, $|A| = 4, |B| = 5$。那么 $G(13, 1/2)$ 中 A 与 B 之间的期望的边数是多少?

(4) 比较本题（2）和（3）的答案，用数论方法构造的图 G_{13} 有没有随机性?（本题是开放式问题，没有固定答案）

注：$G(13, 1/2)$ 是随机构造的（每一条边选择连接或不连接的概率都是 1/2），而 G_{13} 的构造过程是确定的。