深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 3

交作业时间：4 月 5 日

作业规定（重要!）：

- 如果某个问题你不会做，你可以不做，你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答，写下你的部分解答。如果你不会做某个问题，不要写无关、混乱的解答，否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论，但每位同学必须独立写出自己的解答！如果发现**抄袭**，双方本次作业作废，都得 0 分。
- 如果你在别处（别的书或网络等）读到了某个作业问题的答案，你可以阅读解答，在理解了后，可以抄写解答，但必须清楚地写出答案的来源，比如 “该解答来自于某处”。如果抄写解答而不写出来源，算作**剽窃**，本次作业作废，得 0 分。
- 这是一门数学课，所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确，但解答过程没有或不清楚，会被扣分至少 30%。

问题（总分 100 分，每个问题分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）：

1. **注：**本题与作业 2 的第 10 题一样，仅（2）中对于 $g(a_i)$ 和 $h(a_i)$ 的定义有所不同，作业 2 的第 10 题中（2）里 $g(a_i)$ 和 $h(a_i)$ 的定义写错了，抱歉。作业 2 的第 10 题都算正确，自动得 10 分。

   (1) 给定如下包含 10 个不同整数的序列：$3, 9, 5, 28, 18, 7, 40, 33, 19, 2$。其中 $3, 5, 7, 33$ 是一个长度是 4 的单调递增的子序列；$28, 19, 2$ 是一个长度是 3 的单调递减的子序列。找出一个长度最长的单调递增子序列，其长度是多少？找出一个长度最长的单调递减子序列，其长度是多少？

   (2) 给定任意包含 k 个不同整数的序列：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$。定义 $g(a_i)$ 为在 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 之间以 a_i 为结尾的最长的单调递增的子序列的长度，定义 $h(a_i)$ 为在 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 之间以 a_i 为结尾的最长的单调递减的子序列的长度。比如，在 (1) 的序列中，$g(28) = 3$，对应的递增子序列是 $3, 5, 28$；$h(28) = 1$，对应的递减子序列是 28。计算：$g(18), h(18)$；$g(40), h(40)$。

   (3) 根据 (2) 中的定义，对于 $i \neq j$，有没有可能

   $$g(a_i) = g(a_j), \quad h(a_i) = h(a_j)$$

   同时成立？说明理由。

   (4) 证明：任意包含 $n^2 + 1$ 个整数的序列：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$，要么有一个长度 $\geq n + 1$ 的单调递增的子序列，要么有一个长度 $\geq n + 1$ 的单调递减的子序列。

   提示：用反证法，考虑映射 $f(a_i) = (g(a_i), h(a_i))$，对此映射用鸽笼原理。

2. 使用二项式定理回答下列问题。

(1) 判断：$(x+y)^{13}$ 中有没有 x^5y^6 这样的项?

(2) 判断：$(x+y-2)^{13}$ 中有没有 x^5y^6 这样的项?

(3) 计算：$(5x-8y+3)^{13}$ 中 x^6y^7 这一项的系数?

(4) 计算：32^{30} 被 7 除的余数是多少?

解. (1) 没有。

(2) 有。

(3) $\binom{13}{6}5^6(-8)^7 = -56229888000000.$

(4) 计算如下：

$$32^{30} = 2^{5\times 30} = 2^{3\times 50} = 8^{50} = (7+1)^{50} = \sum_{m=0}^{50}\binom{50}{m}7^m.$$

注意在二项式展开中，所有 $m \geq 1$ 的项都能被 7 整除。因此，被 7 除的余数是当 $m=0$ 的项，即 $\binom{50}{0}7^0 = 1.$ □

3. 假设一个硬币两面不是对称的，抛一次硬币得到正面的概率是 $2/3$，反面的概率是 $1/3$。抛硬币 10 次，用 (a,b) 表示正面和反面出现的次数，那么

$$(a,b) \in \{(0,10),(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1),(10,0)\}.$$

(1) $(a,b)=(4,6)$ 的概率是多大?

(2) 在 11 中可能性中，哪种出现的概率最高?

(3) 在 11 中可能性中，哪种出现的概率最低?

(4) 假设硬币是对称的，即抛硬币得到正反两面的概率都是 $1/2$。通过计算估计：$a \leq 7$ 的概率，即抛 10 次得到最多 7 个正面的概率是多大?

解. (1) 用 $p(a,b)$ 表示 (a,b) 出现的概率。那么，

$$p(a,b) = \binom{10}{a}\left(\frac{2}{3}\right)^a\left(\frac{1}{3}\right)^b = \frac{1}{3^{10}}\binom{10}{a}2^a. \tag{1}$$

直接计算可得，$p(4,6) = \frac{1120}{19683} \approx 0.057.$

(2) 根据(1)，注意 2^a 单调递增；而二项式系数 $\binom{10}{a}$ 当 $0 \leq a \leq 5$ 时单调递增，当 $5 \leq a \leq 10$ 时单调递减。因此，$p(a,b)$ 的最大值在 $5 \leq a \leq 10$ 之间达到。直接计算可得，当 $a=7$ 时 $p(a,b)$ 取最大值 $p(7,3) \approx 0.26.$

(3) 根据(1)，注意 2^a 单调递增；而二项式系数 $\binom{10}{a}$ 当 $0 \leq a \leq 5$ 时单调递增，当 $5 \leq a \leq 10$ 时单调递减。因此，$p(a,b)$ 的最小值在 $a=0$ 时达到，为 $p(0,10) \approx 0.000017.$

(4) 用 $p'(a,b)$ 表示当正反面对称时出现 (a,b) 的概率，则

$$p'(a,b)=\binom{10}{a}\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^b=\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{a}. \tag{2}$$

因此，$a\le 7$ 的概率是

$$\sum_{a=0}^{7}p'(a,b)=\frac{1}{2^{10}}\sum_{a=0}^{7}\binom{10}{a}.$$

根据二项式定理，有

$$\sum_{a=0}^{7}\binom{10}{a}=2^{10}-\sum_{a=8}^{10}\binom{10}{a}=2^{10}-\sum_{a=0}^{2}\binom{10}{a}=2^{10}-(1+10+45)=2^{10}-56.$$

因此，$a\le 7$ 的概率是

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{7}p'(a,b)&=\frac{1}{2^{10}}\sum_{a=0}^{7}\binom{10}{a}=\frac{1}{2^{10}}\left(2^{10}-\sum_{a=8}^{10}\binom{10}{a}\right)=\frac{1}{2^{10}}\left(2^{10}-\sum_{a=0}^{2}\binom{10}{a}\right)\\&=1-\frac{56}{2^{10}}\approx 0.945.\end{aligned}$$

□

4. 根据课堂上讲的对阶乘及组合数的估计，回答下列问题。

(1) 比较：$300!$ 与 100^{300}，哪个更大？

(2) 用二进制表示整数 20 需要 5 位。用二进制表示 $\binom{100}{50}$ 这个数字，大概需要多少位？

解. (1) 根据阶乘的估计有

$$300!\ge\left(\frac{300}{e}\right)^{300}>100^{300}.$$

(2) 需要的位数是

$$\left\lceil\log_2\binom{100}{50}\right\rceil.$$

根据二项式系数的估计有

$$2^{100}/\sqrt{200}\le\binom{100}{50}\le 2^{100}/\sqrt{100}.$$

因此，

$$100-\log_2\sqrt{200}\le\log_2\binom{100}{50}\le 100-\log_2\sqrt{100}.$$

计算可得，$\log_2\sqrt{200}\le 3.83$，而 $\log_2\sqrt{100}\ge 3.32$. 因此，

$$96.17=100-3.83\le\log_2\binom{100}{50}\le 100-3.32=96.68.$$

所以，$\lceil\log_2\binom{100}{50}\rceil=97$.

□

5. 一场短跑比赛有 50 个运动员参加，屏幕上只显示前 10 名的名字。假设运动员名字各不相同。用命题 3.7 计算估计：屏幕上显示的运动员名字组合有多少种可能性？

解. 我们需要估计 $\binom{50}{10}$ 的大小。根据命题 3.7，有

$$\frac{2^{h(0.2)\times 50}}{51} \leq \binom{50}{10} \leq 2^{h(0.2)\times 50}.$$

计算可得：$0.721 \leq h(0.2) = -0.2\log_2 0.2 - 0.8\log_2 0.8 \leq 0.722$. 因此，

$$1.39\times 10^9 \leq \frac{2^{0.721\times 50}}{51} \leq \binom{50}{10} \leq 2^{0.722\times 50} \leq 7.4\times 10^{10}.$$

注：如果直接计算得出 $\binom{50}{10} = 1.027\times 10^{10}$，得 0 分。 □

6. 下面是与容斥原理有关的问题：

(1) 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这 3 种求，已知 6 个会打网球的人都会打篮球或排球。求：不会打球的人数？

(2) 得到错位排列的可能性，是随着牌的张数 n 越多而越高还是越低？

(3) $n = 54$ 时，得到错位排列的可能性是多大？

证明. (1) 考虑如下集合

$$A = \text{会打篮球的学生}$$
$$B = \text{会打排球的学生}$$
$$C = \text{会打网球的学生}$$

已知如下：

$$|A| = 14,\quad |B| = 12,\quad |C| = 6,$$
$$|A\cap B| = 6,\quad |A\cap C| = 5,$$
$$|A\cap B\cap C| = 2.$$

根据容斥原理，有

$$|(A\cap C)\cup(B\cap C)| = |A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap(B\cap C)| = |A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|.$$

根据题意有 $(A\cap C)\cup(B\cap C) = C$。因此，

$$|B\cap C| = |C| + |A\cap B\cap C| - |A\cap C| = 6 + 2 - 5 = 3.$$

再用容斥原理，有

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| \\ &= 14 + 12 + 6 - 6 - 5 - 3 + 2 = 20.\end{aligned}$$

因此，不会打球的学生个数是 $25 - 20 = 5$.

(2) 都不是。根据课堂内容，有 n 张牌得到错位排列的可能性是

$$p(n) = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \frac{1}{t!}.$$

因此,

$$p(n) - p(n-1) = (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

因此，当 n 是偶数时，概率增加，当 n 时奇数时，概率降低。

(3) $p(54) = e^{-1} - \sum_{t \geq 55} (-1)^t \frac{1}{t!}$. 对任意 $m \geq 1$，有如下估计:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{t \geq m} (-1)^t \frac{1}{t!} \right| &\leq \sum_{t \geq m} \frac{1}{t!} \\
&= \frac{1}{m!} \left(1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right) \\
&\leq \frac{1}{m!} \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \right) = \frac{(e-1)}{m!} \leq \frac{2}{m!}.
\end{aligned}$$

所以,

$$|p(54) - e^{-1}| \leq \frac{2}{55!} < 0.0001.$$

因此，$p(54) = e^{-1} \pm 0.0001 \approx 0.37 \pm 0.0001$.

□

7. 用双计数方法解决如下问题:

(1) 一个学校有 1000 名学生。学校规定每个学生最多参加 3 个社团，每个社团成立必须至少有 20 名成员。问社团最多能有多少个?

(2) 证明：$\binom{m+n}{s} = \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i} \binom{n}{s-i}$.

(3) 设 A 是一个 r 行 c 列的矩阵，其中每个元素都是 0 或 1。假设每一列都恰好有 k 个 1。给定两行，称这两行为一对 t-完美行，如果这两行满足恰好有 t 列对应位置的元素都是 1。问：这种 t-完美行最多有多少对?

解. (1) 考虑学生属于社团这个二元关系：

$$\mathcal{A} = \{(\text{学生}, \text{社团}) : \text{学生} \in \text{社团}\}.$$

已知学生有 1000 人，假设社团个数是 x 个。我们用两种方式来估计这个二元关系的大小。

- 从学生的角度：$|\mathcal{A}| \leq 1000 \times 3 = 3000$.
- 从社团的角度：$|\mathcal{A}| \geq 20 \times x$.

因此，$20x \leq |\mathcal{A}| \leq 3000$。从而，$x \leq 150$.

(2) 我们从另一个观点来看 $\binom{m+n}{s}$：先从 m 中选出 i 个，再从 n 中选出 $s-i$ 个，其中 $i = 0, 1, \dots, s$。因此，等式右边的求和也是 $\binom{m+n}{s}$.

(3) 考虑 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 这样的出现在矩阵 A 中的元素对：满足两个 1 在 A 的同一列但不同行。用 $\mathcal{B}$ 表示所有这些元素对的集合。下面用两种方式来估计 $|\mathcal{B}|$.

- 根据矩阵的列：因为每列恰好有 k 个 1，矩阵总共有 c 列，因此 $|\mathcal{B}| = c\binom{k}{2}$.
- 根据有多少对 t-完美行，假设有 x 对。那么因为每一对 t-完美行有 t 列对应位置的元素都是 1，所以，$|\mathcal{B}| \geq xt$.

所以，$xt \leq |\mathcal{B}| = c\binom{k}{2}$. 从而，$x \leq \frac{c\binom{k}{2}}{t}$.

□

8. 以下是与集合的基本概念有关的题目。

(1) $\{\{2,3\} \cup \{3,5,6\}\} \cap \{1,2,4,6,7\} =?$

(2) $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{3\})) =?$

(3) $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$，是否正确？如正确，给出证明，如错误，给一个反例。

(4) 证明：如果 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$，则 $A \times C \subseteq B \times D$.

解. (1) $\emptyset$.

(2) 先写出 $\mathcal{P}(\{3\}) = \{\emptyset, \{3\}\}$. 因此，$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{3\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{3\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{\emptyset, \{3\}\}\}$.
又有 $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$.
所以，

$$\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{3\})) = \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{\emptyset\}), (\emptyset,\{\{3\}\}), (\emptyset,\{\emptyset,\{3\}\})\}.$$

(3) 是，证明可根据定义直接证明，略。

(4) 可根据定义直接证明，略。 □

9. (1) 设 $f: A \to B$ 和 $g: A \to C$ 都是双射。试定义一个双射函数 $h: B \to C$.

(2) 设 $E = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k\}$，$O = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \nmid k\}$，分别表示偶数集和奇数集。$f(n) = 2n$ 与 $g(n) = 2n+1$ 分别是从 $\mathbb{Z}$ 到 E 与从 $\mathbb{Z}$ 到 O 的双射. 试写出 f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}，其中 h 由 (1) 中定义。

解. (1) $h(b) = g(f^{-1}(b))$.

(2) $f^{-1}: E \to \mathbb{Z}$，定义为 $f^{-1}(x) = x/2$.
$g^{-1}: O \to \mathbb{Z}$，定义为 $g^{-1}(x) = (x-1)/2$.
根据 (1), $h: E \to O$, 其定义为 $h(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x/2) = 2\frac{x}{2}+1 = x+1$. 因此, $h^{-1}: O \to E$ 的定义是 $h^{-1}(x) = x-1$. □

10. 用构造映射的方法证明：对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$，都有

(1) $|(a,b)| = \mathbb{R}$,

(2) $|[a,b]| = \mathbb{R}$. （提示：证明 $|(a,b)| = |[a,b]|$）

证明. (1) 命题 3.18 已证明 $|(-1,1)| = |\mathbb{R}|$，因此，只要证明 $|(-1,1)| = |(a,b)|$ 即可. 这只需要考虑双射 $f:(-1,1)\to(a,b)$，其定义为 $f(x) = \frac{b-a}{2}(x-1)+b$.

(2) (1) 中的双射 f 也可以定义在闭区间上，$f:[-1,1]\to[a,b]$，函数定义不变。这表明 $|[-1,1]| = |[a,b]|$. 因此，如果能证明

$$|[-1,1]| = |(-1,1)| \tag{3}$$

则由命题 3.18 有 $|[a,b]| = |[-1,1]| = |(-1,1)| = |\mathbb{R}|$.

下面证明(3)，我们要构造一个从 $[-1,1]$ 到 $(-1,1)$ 上的双射。首先考虑如下可数无穷集

$$A = \left\{0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \cdots\right\} \subseteq (-1,1).$$

令

$$B_r = \left(-\frac{1}{2^{r-1}}, -\frac{1}{2^r}\right), \quad r = 1,2,\ldots,$$
$$C_s = \left(\frac{1}{2^s}, \frac{1}{2^{s-1}}\right), \quad s = 1,2,\ldots$$

注意到 A, B_r, C_s 均互不相交。令

$$B = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r, \quad C = \bigcup_{s=1}^{\infty} C_s.$$

则有如下分解

$$(-1,1) = A \cup B \cup C.$$

现在考虑

$$A' = \left\{-1, 1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, -\frac{1}{2^3}, \cdots\right\} \subseteq [-1,1].$$

注意到 A', B_r, C_s 仍然均互不相交。则有

$$[-1,1] = A' \cup B \cup C.$$

于是我们可以考虑以下一系列双射：

$$f: A' \to A, \quad -1 \mapsto -\frac{1}{2}, 1 \mapsto \frac{1}{2}, 0 \mapsto 0, -\frac{1}{2^t} \mapsto -\frac{1}{2^{t+1}}, \frac{1}{2^t} \mapsto \frac{1}{2^{t+1}}, \quad t = 1,2,3,\ldots$$
$$g: B \cup C \to B \cup C, \quad x \to x.$$

注意 f, g 都是双射（其中 g 是恒等映射，f 是从可数集 A' 到可数集 A 上的双射），因此，f, g 一起定义了一个从 $[-1,1]$ 到 $(-1,1)$ 上的双射。证毕。

注：如果不要求构造映射，则可另证如下：根据 $(a,b) \subseteq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 得 $|(a,b)| \le |[a,b]| \le |\mathbb{R}|$. (*1*) 中已证明 $|(a,b)| = |\mathbb{R}|$，因此，也有 $|[a,b]| = |\mathbb{R}|$. □