深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 3

交作业时间：4 月 5 日

作业规定（重要!）：

- 如果某个问题你不会做，你可以不做，你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答，写下你的部分解答。如果你不会做某个问题，不要写无关、混乱的解答，否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论，但每位同学必须独立写出自己的解答！如果发现**抄袭**，双方本次作业作废，都得 0 分。
- 如果你在别处（别的书或网络等）读到了某个作业问题的答案，你可以阅读解答，在理解了后，可以抄写解答，但必须清楚地写出答案的来源，比如"该解答来自于某处"。如果抄写解答而不写出来源，算作**剽窃**，本次作业作废，得 0 分。
- 这是一门数学课，所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确，但解答过程没有或不清楚，会被扣分至少 30%。

问题（总分 100 分，每个问题分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）：

1. **注：**本题与作业 2 的第 10 题一样，仅（2）中对于 $g(a_i)$ 和 $h(a_i)$ 的定义有所不同，作业 2 的第 10 题中（2）里 $g(a_i)$ 和 $h(a_i)$ 的定义写错了，抱歉。作业 2 的第 10 题都算正确，自动得 10 分。

   (1) 给定如下包含 10 个不同整数的序列：$3, 9, 5, 28, 18, 7, 40, 33, 19, 2$。其中 $3, 5, 7, 33$ 是一个长度是 4 的单调递增的子序列；$28, 19, 2$ 是一个长度是 3 的单调递减的子序列。找出一个长度最长的单调递增子序列，其长度是多少？找出一个长度最长的单调递减子序列，其长度是多少？

   (2) 给定任意包含 k 个不同整数的序列：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$。定义 $g(a_i)$ 为在 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 之间以 a_i 为结尾的最长的单调递增的子序列的长度，定义 $h(a_i)$ 为在 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 之间以 a_i 为结尾的最长的单调递减的子序列的长度。比如，在 (1) 的序列中，$g(28) = 3$，对应的递增子序列是 $3, 5, 28$；$h(28) = 1$，对应的递减子序列是 28。计算：$g(18), h(18)$；$g(40), h(40)$。

   (3) 根据 (2) 中的定义，对于 $i \neq j$，有没有可能

   $$g(a_i) = g(a_j), \quad h(a_i) = h(a_j)$$

   同时成立？说明理由。

   (4) 证明：任意包含 $n^2 + 1$ 个整数的序列：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$，要么有一个长度 $\geq n + 1$ 的单调递增的子序列，要么有一个长度 $\geq n + 1$ 的单调递减的子序列。

   提示：用反证法，考虑映射 $f(a_i) = (g(a_i), h(a_i))$，对此映射用鸽笼原理。

2. 使用二项式定理回答下列问题。

(1) 判断：$(x+y)^{13}$ 中有没有 x^5y^6 这样的项？

(2) 判断：$(x+y-2)^{13}$ 中有没有 x^5y^6 这样的项？

(3) 计算：$(5x-8y+3)^{13}$ 中 x^6y^7 这一项的系数？

(4) 计算：32^{30} 被 7 除的余数是多少？

3. 假设一个硬币两面不是对称的，抛一次硬币得到正面的概率是 2/3，反面的概率是 1/3。抛硬币 10 次，用 (a,b) 表示正面和反面出现的次数，那么

$$(a,b) \in \{(0,10),(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1),(10,0)\}.$$

(1) $(a,b)=(4,6)$ 的概率是多大？

(2) 在 11 中可能性中，哪种出现的概率最高？

(3) 在 11 中可能性中，哪种出现的概率最低？

(4) 假设硬币是对称的，即抛硬币得到正反两面的概率都是 1/2。通过计算估计：$a \leq 7$ 的概率，即抛 10 次得到最多 7 个正面的概率是多大？

4. 根据课堂上讲的对阶乘及组合数的估计，回答下列问题。

(1) 比较：300! 与 100^{300}，哪个更大？

(2) 用二进制表示整数 20 需要 5 位。用二进制表示 $\binom{100}{50}$ 这个数字，大概需要多少位？

5. 一场短跑比赛有 50 个运动员参加，屏幕上只显示前 10 名的名字。假设运动员名字各不相同。用命题 3.7 计算估计：屏幕上显示的运动员名字组合有多少种可能性？

6. 下面是与容斥原理有关的问题：

(1) 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 个会打网球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这 3 种球，已知 6 个会打网球的人都会打篮球或排球。求：不会打球的人数？

(2) 得到错位排列的可能性，是随着牌的张数 n 越多而越高还是越低？

(3) $n=54$ 时，得到错位排列的可能性是多大？

7. 用双计数方法解决如下问题:

(1) 一个学校有 1000 名学生。学校规定每个学生最多参加 3 个社团，每个社团成立必须至少有 20 名成员。问社团最多能有多少个？

(2) 证明：$\binom{m+n}{s} = \sum_{i=0}^{s} \binom{m}{i}\binom{n}{s-i}$.

(3) 设 A 是一个 r 行 c 列的矩阵，其中每个元素都是 0 或 1。假设每一列都恰好有 k 个 1。给定两行，称这两行为一对 t-完美行，如果这两行满足恰好有 t 列对应位置的元素都是 1。问：这种 t-完美行最多有多少对？

8. 以下是与集合的基本概念有关的题目。

   (a) $\{\{2,3\} \cup \{3,5,6\}\} \cap \{1,2,4,6,7\} = ?$

   (b) $\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{3\})) = ?$

   (c) $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$，是否正确？如正确，给出证明，如错误，给一个反例。

   (d) 证明：如果 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$，则 $A \times C \subseteq B \times D$.

9. (1) 设 $f : A \to B$ 和 $g : A \to C$ 都是双射。试定义一个双射函数 $h : B \to C$.

   (2) 设 $E = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \mid k\}$，$O = \{k \in \mathbb{Z} : 2 \nmid k\}$，分别表示偶数集和奇数集。$f(n) = 2n$ 与 $g(n) = 2n+1$ 分别是从 $\mathbb{Z}$ 到 E 与从 $\mathbb{Z}$ 到 O 的双射. 试写出 f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}，其中 h 由（1）中定义。

10. 用构造映射的方法证明：对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$，都有

   (a) $|(a,b)| = \mathbb{R}$,

   (b) $|[a,b]| = \mathbb{R}$. （提示：证明 $|(a,b)| = |[a,b]|$）