深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 2

交作业时间：待定

作业规定（重要!）:

- 如果某个问题你不会做，你可以不做，你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答，写下你的部分解答。如果你不会做某个问题，不要写无关、混乱的解答，否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论，但每位同学必须独立写出自己的解答！如果发现**抄袭**，双方本次作业作废，都得 0 分。
- 如果你在别处（别的书或网络等）读到了某个作业问题的答案，你可以阅读解答，在理解了后，可以抄写解答，但必须清楚地写出答案的来源，比如"该解答来自于某处"。如果抄写解答而不写出来源，算作**剽窃**，本次作业作废，得 0 分。
- 这是一门数学课，所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确，但解答过程没有或不清楚，会被扣分至少 30%。

问题（总分 100 分，每个问题分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）:

1. 分别用直接证明法和归纳法证明 $(1+\frac{1}{1})\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{k})$ 是一个整数。

证明. 直接证明：直接计算可得

$$(1+\frac{1}{1})\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{k})=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\cdots\times\frac{k+1}{k}=k+1,$$

$k+1$ 是整数，故问题得证。

归纳法：设 $a_n=(1+\frac{1}{1})\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{n})$. 我们将证明如下命题：对任意 n 都有 $a_n=n+1$。因此，a_n 都是整数。

- 基础情形：$n=1$，$a_1=2$，因此命题成立。
- 归纳假设：假设 $n=k$ 时，$a_k=k+1$。
- 现在证明 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=k+2$。计算如下

$$a_{k+1}=(1+\frac{1}{1})\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{k})\times(1+\frac{1}{k+1})=a_k\times(1+\frac{1}{k+1}).$$

根据归纳假设有 $a_k=k+1$。因此，

$$a_{k+1}=a_k\times(1+\frac{1}{k+1})=k+1\times(1+\frac{1}{k+1})=k+2$$

命题得证。 □

2. 证明：对任意 n 个数排序只需要进行最多 n^2 次比较。

证明. 冒泡排序算法能对 n 个数进行正确地排序。冒泡排序算法对 n 个数字比较的次数是

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)n}{2}\le n^2.$$ □

3. 证明算术基本定理：每一个 ≥ 2 的自然数都可以写成素数的乘积。

证明. 用反证法。

假设定理不成立，那么，有某些 ≥ 2 的自然数不能写成素数的乘积。设 n 是所有不能写成素数乘积的那些数字中最小的。换句话说，

$$\text{如果}2\le k\le n-1\text{，那么}k\text{能写成素数的乘积。}\tag{1}$$

因为 n 不能写成素数的乘积，所以 n 不是素数，即，n 是合数。根据合数的定义，n 有除了 1 和 n 之外的因子，即 $n=ab$，其中，$2\le a,b\le n-1$。根据(1)，a,b 都能写成素数的乘积，所以 $n=ab$ 也是素数的乘积，这与前面假设 n 不能写成素数的乘积矛盾。 □

4. 完成拉姆齐定理中情形二的分类讨论。

证明. 情形二：$k\le 2$。这时，因为 X 最多认识 2 人，所以 X 至少有 3 人不认识。假设 X 不认识 A,B,C。

- A,B,C 相互都认识。这正好是题目要求的。
- A,B,C 至少有两人相互不认识。这时有三种情况。
  (i) A,B 相互不认识。此时 X,A,B 三人相互不认识。
  (ii) B,C 相互不认识。此时 X,B,C 三人相互不认识。
  (iii) C,A 相互不认识。此时 X,C,A 三人相互不认识。 □

5. 如果把拉姆齐定理中的 6 个人改成 5 人，定理是否还成立？若成立，给出证明；若不成立，给一个反例。

解. 不成立。反例见图1. □

6. 完成鸽笼原理用归纳法证明时，情形二的证明。

证明. 情形二：存在唯一的一个 $x\in X$ 满足 $f(x)=y$。不妨记这个 x 为 x^*，则 $f(x^*)=y$.

定义

$$X'=X\setminus\{x^*\},$$
$$Y'=Y\setminus\{y\}.$$

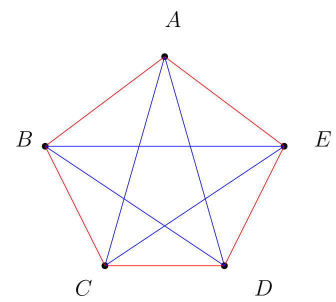

图 1: 5 个人中不存在相互认识的 3 个人，也不存在相互不认识的 3 个人。其中红色边表示对应的两个人相互认识，蓝色边表示对应的两个人相互不认识。

考虑映射

$$\widetilde{f}: X' \to Y',$$
$$x \mapsto f(x).$$

因为只有 x^* 满足 $f(x^*) = y$，所以，对 $x \neq x^*$，都有 $f(x) \neq y$. 即，对任意的 $x \in X' = X \setminus \{x^*\}$，都有 $f(x) \neq y$. 换句话说，必有 $f(x) \in Y' = Y \setminus \{y\}$. 所以映射 $\widetilde{f}$ 的定义是可行的。

根据定义，$|X'| = |X| - 1 = k$，$|Y'| = |Y| - 1$，所以，$|X'| = |X| - 1 > |Y| - 1 = |Y'|$。因此，$\widetilde{f}$ 满足归纳假设的条件。根据归纳假设，存在 $a, b \in X'$，$a \neq b$，满足 $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(b)$。但是根据我们对 $\widetilde{f}$ 的定义，有

$$f(a) = \widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(b) = f(b).$$

这就是所要证明的结论。 □

7. (本题来自 [1]) 假设一个实数 x 满足 $x + \frac{1}{x}$ 是一个整数，证明对所有的 $n \geq 1$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ 都是整数。

提示：考虑乘积 $(x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n})$，用强归纳法。

证明. 用强归纳法。

- 基础情形：$n = 1$ 时，$x + \frac{1}{x}$ 是一个整数：这是题目的条件。$n = 2$ 时，

  $$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$$

  是两个整数的差，因此 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 也是整数。
- 归纳假设：假设 $n = k - 1, k$ 时，所证成立，即 $x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ 和 $x^k + \frac{1}{x^k}$ 都是整数。
- 现在考 $n = k + 1$ 的情况，即，我们想证明 $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ 也是整数。为此，考虑如下计算

  $$(x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) = x^{k+1} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} + \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$$

  从而得，

  $$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}). \tag{2}$$

由条件，知道 $x+\frac{1}{x}$ 是整数。根据归纳假设，$x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$ 和 $x^k+\frac{1}{x^k}$ 都是整数。因此，$(x+\frac{1}{x})(x^k+\frac{1}{x^k})$ 是两个整数得乘积，所以也是整除。从而根据(2)有，$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ 是两个整除得差，因此也是整数。 □

8. 在例 2.13 中，如果证明从“不失一般性，假设鸽子 a 放在笼 Y 中”开始，补充后面的证明[1]。

证明. 不失一般性，假设鸽子 a 放在笼 Y 中。现在考虑 b,c。如果 b,c 中至少有一个在 Y 中，则 Y 中有两个鸽子；如果 b,c 都不在 Y 中，即 b,c 都在 X 中，则 X 中有两个鸽子。 □

9. 成人头发一般在 10 万根左右，假设人的头发不超过 15 万根。世界人口目前有 79 亿。那么，至少有多少人的头发数量是一样多的呢?

解. 因为人的头发不超过 15 万根，所以人的头发的根数是在 $0,1,2,\ldots,150000$ 之间（0 表示光头）。共有 150001 中情况。把每一种情况看成一个笼子。每一个人看成鸽子。用推广的鸽笼原理，则至少有

$$k=\left\lceil\frac{7900000000}{150001}\right\rceil=52667$$

个人有一样多的头发。 □

10. (1) 给定如下包含 10 个不同整数的序列：$3,9,5,28,18,7,40,33,19,2$。其中 $3,5,7,33$ 是一个长度是 4 的单调递增的子序列；$28,19,2$ 是一个长度是 3 的单调递减的子序列。找出一个长度最长的单调递增子序列，其长度是多少？找出一个长度最长的单调递减子序列，其长度是多少?

(2) 给定任意包含 k 个不同整数的序列：$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k$。定义 $g(a_i)$ 为在 $a_1,a_2,\ldots,a_i$ 之间以 a_i 为结尾的最长的单调递增的子序列的长度，定义 $h(a_i)$ 为在 $a_1,a_2,\ldots,a_i$ 之间以 a_i 为结尾的最长的单调递减的子序列的长度。比如，在 (1) 的序列中，$g(28)=3$，对应的递增子序列是 $3,5,28$；$h(28)=1$，对应的递减子序列是 28。计算：$g(18),h(18)$；$g(40),h(40)$。

(3) 根据 (2) 中的定义，对于 $i\neq j$，有没有可能

$$g(a_i)=g(a_j),\quad h(a_i)=h(a_j)$$

同时成立？说明理由。

(4) 证明：任意包含 n^2+1 个整数的序列：$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{n^2+1}$，要么有一个长度 $\geq n+1$ 的单调递增的子序列，要么有一个长度 $\geq n+1$ 的单调递减的子序列。

提示：用反证法，考虑映射 $f(a_i)=(g(a_i),h(a_i))$，对此映射用鸽笼原理。

解. (1) 单调递增子序列 $3,5,7,19$，长度是 4；单调递减子序列 $40,33,19,2$，长度是 4。

(2) $g(18)=3$，对应的递增子序列是 $1,5,18$, $h(18)=2$，对应的递减子序列是 $28,18$。

$g(40)=4$，对应的递增子序列是 $3,5,7,40$, $h(40)=1$，对应的递减子序列是 40。

[1] 比较在两种假设下所写的内容，体会对称性。

(3) 不可能。

因为整数 $a_1, \ldots, a_k$ 各不相同，所以 $a_i \neq a_j$。若 $a_i < a_j$，则 $g(a_j) > g(a_i)$；若 $a_i > a_j$，则 $h(a_j) > h(a_i)$.

(4) 用反证法，假设不存在题目所说的情况，那么 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$ 中的任意单调递增，或单调递减序列的长度都不超过 n. 因此，对所有的 $i = 1, 2, \ldots, n^2+1$ 都有，

$$1 \leq g(a_i), h(a_i) \leq n. \tag{3}$$

现在考虑映射

$$\begin{aligned} f : \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}\} &\to \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \\ a_i &\mapsto (g(a_i), h(a_i)). \end{aligned}$$

根据(3)，f 的定义是合理的。现在注意到

$$|\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}\}| = n^2 + 1 > |\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}| = n^2.$$

因此，f 满足鸽笼原理的条件。根据鸽笼原理，存在 $a_i \neq a_j$，使得 $f(a_i) = f(a_j)$，也即，

$$(g(a_i), h(a_i)) = (g(a_j), h(a_j)).$$

但这与 (3) 矛盾。

$\square$

参考文献

[1] Harry Lewis and Rachel Zax. *Essential discrete mathematics for computer science.* Princeton University Press, 2019.