# 深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 2

交作业时间：待定

**作业规定（重要!）**：

- 如果某个问题你不会做，你可以不做，你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答，写下你的部分解答。如果你不会做某个问题，不要写无关、混乱的解答，否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论，但每位同学必须独立写出自己的解答！如果发现**抄袭**，双方本次作业作废，都得 0 分。
- 如果你在别处（别的书或网络等）读到了某个作业问题的答案，你可以阅读解答，在理解了后，可以抄写解答，但必须清楚地写出答案的来源，比如 “该解答来自于某处”。如果抄写解答而不写出来源，算作**剽窃**，本次作业作废，得 0 分。
- 这是一门数学课，所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确，但解答过程没有或不清楚，会被扣分至少 30%。

**问题（总分 100 分，每个问题分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）：**

1. 分别用直接证明法和归纳法证明 $(1+\frac{1}{1})\times(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times\cdots\times(1+\frac{1}{k})$ 是一个整数。
2. 证明：对任意 $n$ 个数排序只需要进行最多 $n^2$ 次比较。
3. 证明算术基本定理：每一个 $\geq 2$ 的自然数都可以写成素数的乘积。
4. 完成拉姆齐定理中情形二的分类讨论。
5. 如果把拉姆齐定理中的 6 个人改成 5 人，定理是否还成立？若成立，给出证明；若不成立，给一个反例。
6. 完成鸽笼原理用归纳法证明时，情形二的证明。
7. (本题来自 [1]) 假设一个实数 $x$ 满足 $x+\frac{1}{x}$ 是一个整数，证明对所有的 $n\geq 1$, $x^n+\frac{1}{x^n}$ 都是整数。
   *提示：考虑乘积 $(x+\frac{1}{x})(x^n+\frac{1}{x^n})$，用强归纳法。*
8. 在例 2.13 中，如果证明从 “不失一般性，假设鸽子 $a$ 放在笼 $Y$ 中” 开始，补充后面的证明[1]。
9. 成人头发一般在 10 万根左右，假设人的头发不超过 15 万根。世界人口目前有 79 亿。那么，至少有多少人的头发数量是一样多的呢?

[1] 比较在两种假设下所写的内容，体会对称性。

10. (1) 给定如下包含 10 个不同整数的序列：$3, 9, 5, 28, 18, 7, 40, 33, 19, 2$。其中 $3, 5, 7, 33$ 是一个长度是 4 的单调递增的子序列；$28, 19, 2$ 是一个长度是 3 的单调递减的子序列。找出一个长度最长的单调递增子序列，其长度是多少？找出一个长度最长的单调递减子序列，其长度是多少？

    (2) 给定任意包含 $k$ 个不同整数的序列：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$。定义 $g(a_i)$ 为在 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 之间以 $a_i$ 为结尾的最长的单调递增的子序列的长度，定义 $h(a_i)$ 为在 $a_1, a_2, \ldots, a_i$ 之间以 $a_i$ 为结尾的最长的单调递减的子序列的长度。比如，在 (1) 的序列中，$g(28) = 3$，对应的递增子序列是 $3, 5, 28$；$h(28) = 1$，对应的递减子序列是 28。计算：$g(18), h(18)$；$g(40), h(40)$。

    (3) 根据 (2) 中的定义，对于 $i \neq j$，有没有可能

$$g(a_i) = g(a_j), \quad h(a_i) = h(a_j)$$

    同时成立？说明理由。

    (4) 证明：任意包含 $n^2 + 1$ 个整数的序列：$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n^2+1}$，要么有一个长度 $\geq n + 1$ 的单调递增的子序列，要么有一个长度 $\geq n + 1$ 的单调递减的子序列。

    提示：用反证法，考虑映射 $f(a_i) = (g(a_i), h(a_i))$，对此映射用鸽笼原理。

# 参考文献

[1] Harry Lewis and Rachel Zax. *Essential discrete mathematics for computer science.* Princeton University Press, 2019.