深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 12

交作业时间：6 月 16 日

作业规定（重要!）：

- 如果某个问题你不会做，你可以不做，你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答，写下你的部分解答。如果你不会做某个问题，不要写无关、混乱的解答，否则你会得到一个**负的分数**。
- 鼓励相互讨论，但每位同学必须独立写出自己的解答！如果发现**抄袭**，双方本次作业作废，都得 0 分。
- 如果你在别处（别的书或网络等）读到了某个作业问题的答案，你可以阅读解答，在理解了后，可以抄写解答，但必须清楚地写出答案的来源，比如"该解答来自于某处"。如果抄写解答而不写出来源，算作**剽窃**，本次作业作废，得 0 分。
- 这是一门数学课，所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确，但解答过程没有或不清楚，会被扣分至少 30%。

问题（总分 100 分，每个问题分数平均分配，每个问题的小问，分数平均分配）：

1. (1) S_3 的三阶子群，与 $(\mathbb{Z}_3, +)$（模 3 的加法）同构吗？如果同构，给出一个同构映射并验证给出的映射是同构，如果不同构，说明原因.

   (2) 4 阶交换群 $(\mathbb{Z}_2^2, +)$（其中加法为逐位布尔运算，详见讲义例 6.9），与 4 阶循环群 $(\mathbb{Z}_4, +)$（模 4 的加法）同构吗？如果同构，给出一个同构映射并验证给出的映射是同构，如果不同构，说明原因.

2. 设 G 是群，$H \leq G$，$K \leq G$.

   (1) 证明 $(H \cap K) \leq G$.

   (2) $H \cup K$ 是否也是 G 的子群？若是，给出证明，若不是，举出反例.

3. 设 $(G, *)$ 是有限群，$|G| = n$. 设 $g \in G$，且 $|g| = k$.

   (1) 命 $H = \{e, g, g^2, \ldots, g^{k-1}\}$. 证明 $(H, *) \leq (G, *)$.

   (2) 证明：有限群每一个元素的阶都必须整除群的阶.

   (3) 非交换群 S_4 中有没有阶是 5 的置换？若有，给出例子，若没有，指出原因.

   (4) 非交换群 S_4 中有没有阶是 6 的置换？若有，给出例子，若没有，指出原因.

4. 设 G 是群，$g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$. 设 $\Omega = \{H \leq G : \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subseteq H\}$. 定义:

$$F(g_1, g_2, \ldots, g_k) = \bigcap_{H \in \Omega} H.$$

证明：$F(g_1, g_2, \ldots, g_k) \leq G$.

注：$F(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 叫做由 $g_1, g_2, \ldots, g_k$ 生成的 G 的子群，记作 $\langle g_1, g_2, \ldots, g_k \rangle$.

5. (1) 记

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

S_3 中由 g 和 h 生成的子群 H 是什么?

(2) 把 H 中的每个元素用 g 与 h 的乘积来表达.

注：例如 $g^3, ghgh, hhg, hgghgh$ 等等，都叫做 g 与 h 的乘积，并不是仅指 gh 和 hg.

例如：H 因为是子群，有单位元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 单位元可以写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = h^2.$$