

深北莫 — 离散数学 (2022 年春季学期) 作业 1

交作业时间: 待定

作业规定 (重要!):

- 如果某个问题你不会做, 你可以不做, 你将自动得到该问题 20% 的分数。如果你对某个问题只有部分的解答, 写下你的部分解答。如果你不会做某个问题, 不要写无关、混乱的解答, 否则你会得到一个**负**的分数。
- 鼓励相互讨论, 但每位同学必须独立写出自己的解答! 如果发现**抄袭**, 双方本次作业作废, 都得 0 分。
- 如果你在别处 (别的书或网络等) 读到了某个作业问题的答案, 你可以阅读解答, 在理解了后, 可以抄写解答, 但必须清楚地写出答案的来源, 比如 “该解答来自于某处”。如果抄写解答而不写出来源, 算作**剽窃**, 本次作业作废, 得 0 分。
- 这是一门数学课, 所以尽量将你的解答写得清楚、明白。如果只是最终答案正确, 但解答过程没有或不清楚, 会被扣分至少 30%。

问题 (总分 100 分, 每个问题的分数平均分配, 每个问题的小问, 分数平均分配)。

1. 如果用算法 1 来计算数字 1234567890987654321 是不是素数, 最多大约需要多少次计算? 用 AKS 素数测试算法呢? AKS 算法快大概多少倍?
2. 用欧几里得算法计算最大公因子: (1) (256, 34), (2) (256, 1234)。
3. 给定两个自然数 a 和 b , 如果 $a \mid c$ 并且 $b \mid c$, 则称 c 是 a 和 b 的一个公倍数。
 - (1) 证明: a 和 b 的最小公倍数等于 $\frac{ab}{(a,b)}$ 。
 - (2) 用欧几里得算法计算 123 和 456 的最小公倍数。
4. 以下这个素数表包含一万个素数。参照素数表解答下列问题。
 - (1) 把 100 写成两个素数的和。把 1000 写成两个素数的和。
 - (2) 在 100 到 200 之间有没有孪生素数? 有的话, 全部写出来。
 - (3) 素数定理的内容是说: 在 $2, 3, 4, 5, \dots, n$ 之间大概有 $\frac{n}{\log_e n}$ 个素数。
 - (i) 用素数定理来估计在 10000 到 100000 之间, 大概有多少个素数?
 - (ii) 用素数表统计 10000 到 100000 之间的素数个数。
 - (iii) 两者相差多少? 两者的商是多少?

5. 历史上，数学家曾希望寻找到一个数学公式，希望这个公式计算出来的每个数都是素数。18 世纪，欧拉曾给出一个公式 $f(n) = n^2 - n + 41$ 。比如， $f(1) = 41$ ， $f(2) = 43$ ， $f(3) = 47$ ，等都是素数。利用素数表解决下列问题。

(1) 在 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(40)$ 之间，有多少个素数？

(2) $f(41)$ 是不是素数？如果不是，把它写成两个数的乘积。